Matemática

e

Música

Mauro Sergio S. Cabral

AGRADECIMENTOS

Agradeço a minha esposa, Anna Maria Poncy, a minha irmã, Maria Amélia dos Santos Cabral, ao meu amigo, Silvio Pinha Gomes e ao meu professor de música, André Luis Fernandes da Silva pela leitura e opinião sobre o trabalho de pesquisa que realizei.

INTRODUÇÃO

Por volta dos meus trinta anos, formado como professor de matemática, resolvi comprar um violão e aprender a tocá-lo. Tentei, na ocasião, aprender sem um professor, o que me fez desistir da empreitada, logo a seguir. Este violão veio me acompanhando , sempre como parte da mobília. Aos setenta anos, já aposentado, resolvi dar uma real utilização ao instrumento, desta vez com o auxílio de um professor.
Com um primeiro professor aprendi os principais acordes musicais e, desta forma, acompanhava no violão algumas músicas conhecidas. Entretanto, não era o que me entusiasmava, pois tinha que cantar ou alguém fazê-lo para podermos acompanhar no violão. Procurei outro professor, um outro método. Surgiu, então, o professor atual, o André, que na realidade, me ensina a teoria musical, onde as músicas se apresentam codificadas na pauta musical.
Consegui o que procurava, já que descobri como tocar no violão as músicas direto da pauta musical, sem ficar memorizando acordes para acompanhamento, como fazia. Ao associar fisicamente, as notas no braço do violão, a partir da simbologia da pauta musical, comecei a verificar uma enorme relação com a matemática, minha principal formação.
Conforme meu professor ia apresentando pautas musicais mais complexas, maior eu verificava a relação entre a ciência matemática e o estudo da música. Levando-se em conta que a música tem como base o estudo do som, portanto grande influência da física nas ondas sonoras, mais a matemática se entranha no estudo da música. Observando, ainda, a evolução dos computadores, já que tenho mestrado em computação, e o desenvolvimento da música eletrônica, de novo, verifico que a influência da matemática é enorme.
Baseado nisto, resolvi estudar o desenvolvimento da música, desde a antiguidade até os dias de hoje, considerando neste estudo apenas os aspectos da influência da matemática.
Muita literatura existe sobre o tema matemática x música. O que pretendo apresentar nesta pesquisa é, de forma bem resumida, os principais pontos que devem ser destacados e as explicações necessárias para a compreensão dos pontos abordados.
Assim, será apresentado primeiro, um breve estudo da história da música, e a seguir, as particularidades da matemática, que serviram de base para a teoria musical e, finalmente, uma conclusão sobre a relação da matemática e da música ao longo do tempo, inclusive os tempos futuros.

A HISTÓRIA DA MÚSICA

Não é minha intenção discorrer sobre a evolução da música, propriamente dita, mas mostrar alguns pontos importantes na sua evolução. Se levarmos em conta que, de certa forma, a música é uma expressão sonora com certa organização, podemos obtê-la cantando, batendo palmas ou tocando qualquer tipo de instrumento. Sendo assim, podemos afirmar que os princípios musicais vem desde os tempos das cavernas, sendo parte integrante de nossas vidas. Claro que a música foi evoluindo com o desenvolvimento tecnológico da humanidade.
Nesta linha de tempo, vamos escolher o século VI a.C., quando Pitágoras, o grande matemático dá origem ao estudo da música, como um ramo da matemática. Pitágoras e Filolau foram os teóricos musicais da escola pitagórica no período pré-clássico e, a seguir, Arquitas, Aristoxeno e Aristóteles já são considerados do período clássico.

Arquitas de Tarento desenvolveu o estudo da música desvendando seus fundamentos racionais, em relação a natureza do som. Pensa-se que as experiências sonoras, realizadas pelos pitagóricos, tenha tido como base a utilização do monocórdio, instrumento de uma única corda, onde eram observados os diversos sons produzidos.
O que temos de registro sobre música dos períodos primitivo e da antiguidade, assim como do início da idade medieval são apenas pinturas, esculturas, referências literárias ou religiosas, instrumentos e poucas teorias musicais.
Assim, muitos estudiosos classificam os períodos históricos da música ocidental como:

a) Medieval - até cerca de 1450
b) Renascentista – 1451 a 1600
c) Barroca - 1601 a 1750
d) Clássica - 1751 a 1810
e) Romantica – 1811 a 1900
f) Moderna – depois de 1900

IDADE MEDIEVAL (até 1450)

Neste período estamos tratando de grande parte da antiguidade. A música da antiguidade e dos primórdios da idade média tem apenas uma linha melódica, frequentemente chamada de monofonia. A polifonia apareceu na Europa em torno do século IX. As civilizações envolvidas foram a egípcia, a grega, a persa, a mesopotâmica e a romana. O povo palestino, embora em menor quantidade, também colaborou musicalmente neste período. Por outro lado, embora do oriente, a Índia e a China também participaram enormemente no referido período.
A música, nesta época, associava-se a uma origem divina. Acreditava-se que a música tinha poderes mágicos, podendo purificar o corpo e o espírito. Segundo Platão, a música teria o poder de transformar o estado de espírito das pessoas e controlar as suas ações. Segundo Aristóteles, a educação musical era fundamental aos jovens , pois como arte alcançaria o estado afetivo da mente.
Embora estejamos incluindo grande parte da antiguidade na idade medieval, na realidade, muitos historiadores dão enfoque da idade média para o período de 1400 a 1450. Neste período, com a implantação do Cristianismo, a igreja passa a ser fundamental na evolução da música. Os cânticos faziam parte do culto cristão, vindo a ter uma forma de melodia chamada ‘cantochão’. Santo Ambrósio, elaborando regras para o seu canto ‘ambrosiano’, criou a primeira forma sistematizada do cantochão. Depois, o Papa Gregório, com os seus eclisiásticos, criaram o canto ‘gregoriano’, mais conhecido atualmente.
Durante o período medieval, surge pela primeira vez, a pauta musical. O monge italiano Guido d ´Arezzo sugeriu o uso de uma pauta de quatro linhas. A associação do sistema silábico de dar nomes ás notas (Dó, Ré, Mi, Fá, Sol, Lá, Si), também se deve a ele, onde cada linha e espaço representariam essas notas. Durante o século XIX, o sistema de Guido foi adaptado para o que se conhece atualmente. Guido d´Arezzo montou a sequência de notas baseado nas iniciais dos versos do Hino a São Joâo Baptista, canção extremamente popular na época.

IDADE RENASCENTISTA (de 1451 a 1600)

Nesse período, na Europa, cresce o interêsse ao saber e à cultura. Época de grandes descobertas dos exploradores (Vasco da Gama, Cabral, Colombo). Aumenta o interêsse pela música não religiosa. Despontam os avanços na Ciência e Astronomia.
Os compositores passaram a ter interêsse em escrever peças para instrumentos. A música renascentista já é do estilo polifônico, ou seja, várias melodias ao mesmo tempo.
A polifonia não é exclusivamente ocidental, mas foi a partir do ocidente que ela se especializou. Com a polifonia nasce o ‘Organum’, que é um guia (pauta) onde ordenadamente

se inserem vários ritmos que vão ser usados na cantiga. Uma forma similar de composição musical, o ‘madrigal’ surgiu neste período, na Itália. Na Itália, Giovani Palestina, criou o mais importante sistema de escrita polifônica, que antecedeu a Bach. Na Renascença, a música inglesa atingiu o apogeu, surgindo grandes ‘madrigalistas’ ingleses que musicavam a poesia da época. Ainda, nesta época, Philip di Vitry publicou um livro sobre música e desenvolveu a teoria e grafia sobre o ritmo.
Uma das marcas do Renascimento foi a aparição dos editores de música, tornando mais rápida a difusão das obras musicais. Neste período a humanidade já não vive apenas os valores da igreja. Esta se tornou menos rígida, permitindo uma convivência maior entre a música sacra e a profana. A escrita musical ainda era da forma medieval, porém com muitas modulações e transposições. As formas vocais mais importantes no período foram ‘frótola’, ‘madrigais’ e ‘chanson’.

BARROCO (1601 a 1750)

Os compositores da música barroca fizeram mudanças indispensáveis na notação musical. Desenvolveram técnicas, novos instrumentos musicais. Uma das novas formas musicais desenvolvidas foi a ‘ópera’, embora tenha começado na Renascença. O violino foi o instrumento que mais se afirmou, embora os instrumentos de teclas sofressem grandes evoluções. A orquestra toma uma forma mais estruturada. Aumenta o acesso do público, em geral, à música.
Na música do estilo barroco era comum o uso da polifonia e do contraponto. Um dos representantes mais importante foi Vivaldi, responsável pela composição dos concertos “As quatro estações”.
A música barroca é exuberante. Ritmos energéticos, melodias ornamentais e contrastes entre sonoridades fortes e suaves. A música italiana barroca teve como grande mestre Antonio Vivaldi. Além dele, foram importante Johann Sebastian Bach e Haendel. Muitos estudiosos delimitam o período da música barroca entre o aparecimento da ‘opera’ e do ‘oratório’ até a morte de Bach.

CLÁSSICA (1751 a 1810)

Nesta época temos as composições de Joseph Hayden e Wolfgang Mozart, bem como as primeiras composições de Beethoven. A música clássica é tonal. Usou-se bastante a técnia de “crescendo” e “decrescendo” . Novos instrumentos apareceram, possibilitando o som orquestrado. É uma música mais elegante e menos complicada que a barroca. Novos intrumentos apareceram como o piano e o clarinete. O cravo deu seu lugar a mais um instrumento de sopro. A música instrumental passa a ser mais importante que a vocal. Neste período criou-se a ‘Sonata’, obra com vários movimentos para um ou mais instrumentos. A sinfonia é, na realidade, uma sonata para orquestra. O trio Haydn, Mozart e Beethoven foram os maiores compositores de sinfonias do classicismo. Haydn compôs mais de 100 sinfonias e Mozart mais de 600 peças. O classicismo buscava, antes de tudo, refletir a ordem do mundo e seus componentes essenciais.

ROMÂNTICA (1811 a 1900)

Este período caracteriza-se pela liberdade de expressão e de sentimentos. As melodias românticas são mais líricas e as harmonias mais contrastantes. As obras musicais tomam maiores proporções tanto a nível sonoro quanto a nível de duração. A orquestra atingiu grande qualidade e quantidade de músicos. As melodias tornam-se apaixonadas, semelhante a

canção. Durante essa época, houve grande florescimento da canção para piano e canto. Na orquestra a seção dos metais ganhou maior importãncia.
Os românticos desiquilibraram a estrutura, a forma e a expressividade dos compositores clássicos. Deram mais liberdade de forma e expressões mais intensa, revelando mais fortemente os sentimentos. As melodias tornam-se apaixonadas, semelhante à canção. Há grande emprego de dissonâncias, ou seja, todo o som parece exigir um outro som, logo em seguida. Os músicos, nesta fase, procuram exprimir toda a sua alma.
Beethoven, surgiu nesta época, apesar de ser um mestre das formas clássicas, pois escreveu obras de espírito romântico. Destacam-se, ainda, Franz Shubert, Carl Maria von Weber e Mendelsshon. Também Frederic Chopin se destaca por suas peças de piano.

MODERNA (depois de 1900)

No início do século XX tivemos o surgimento da era da experiência, da procura de novas técnicas para a arte, em geral. Na música surgiram novas técnicas de composição e de instrumentos inovadores e tecnológicos. Assim, surgiram os primeiros instrumentos eletrônicos, ligados primeiramente à música ‘pop’ e ao ‘rock’ e, em seguida, a outros gêneros musicais. Houve uma renovação na linguagem musical, na procura de novos timbres, harmonias e ritmos, gerando novos métodos de composição musical. Começaram a serem escritas obras a partir da utilização da técnica do dodecafonismo, ou seja, de uma série de 12 notas, ao invés das 7 notas da escala.
Alguns aspectos tornaram-se importantes na música, neste período, tais como o espírito nacionalista, o aparecimento de grandes compositores norte-americanos, a internacionalização da música e, finalmente, a procura de novos princípios harmônicos.
O nacionalismo foi marcante na música espanhola, assim como nos governos comunistas da época. Os compositores americanos começaram a expressar ideias de vanguarda e na América Latina, compositores como Carlos Chaves e Heitor Villa Lobos seguiam o mesmo caminho.
Na internacionalização da música destacam-se Claude Debussy e Maurice Ravel, assim como o compositor russo, Igor Stravinsky, inovador por excelência, criando vários estilos músicais.
Em relação aos princípios harmônicos, os músicos acreditavam já terem sido esgotados todos os recursos e sentiam que a música precisava de uma estrutura harmônica nova.
Dentre as tendências e técnicas de composição mais importantes da música no século XX, temos;

Impressionismo	Nacionalismo	Expressionismo
Música Concreta	Serialismo	Música Eletrônica
Influência do jazz	Neoclassicismo	Música Aleatória
Atonalidade		

Como se vê, no século XX, a música se mostra como uma mistura complexa de muitas tendências. Alguns estudiosos chamam a música da primeira metade do século XX de ‘moderna” e a segunda metade de “pós-moderna”. O conceito de ‘moderno” traz a ideia de atualidade e renovação, remetendo ao domínio europeu capitalista comercial e industrial e no conceito de “pós-moderno” temos a representação da sociedade capitalista globalizada e informatizada.

Viajando no tempo, podemos fazer um pequeno resumo da história da música, tal como :

No século IV a.C, Aristóxeno idealizou um modelo para descrever os intervalos musicais como distâncias no espaço enttre as notas. No século VI, d.C, Boécio estabeleceu que a música é a ciências dos números e que estes governam o mundo, harmonizando todas as coisas, Noséculo XVI, Zarlino continuou os estudos relacionados aos intervalos musicais, dividindo a oitava em 12 partes iguais. No século XVII, Galileu Galilei estudou a proporção entre frequências das vibrações. No século XVIII, Euler, Bernoulli, Lagrange e D ´Alembert desenvolveram os estudos matemáticos relacionados ao som. No século XIX, Fourier dá continuidade aos estudos da vibração do som e já no século XX, as relações entre a matemática e a música se intensificaram com os estudos da música atonal e dodecafônica.

Mais atualmente, no acesso à linguagem de programação e à linguagem musical, nascem coisas fantásticas, não se sabendo mais se o computador faz a música ou não. A computação musical é um processo extremamente poderoso para a criação artística. Tão importante que justifica a nova área da ciência, chamada de sonologia, que não se trata apenas de música, mas ela é beneficiada por ferramentas advinda dessa nova ciência. A música eletroacústica foi uma das primeiras músicas sem instrumentos musicais, propriamente dito. É composta por sintetizadores, gravadores, mixers, computadores, entre outros equipamentos. Automatizar instrumentos, com a utilização de software específico passa a ser algo rotineiro que Leonardo da Vinci tentou fazer com os recursos de sua época. A computação veio, também, facilitar a aprendizagem musical, num ambiente multimidia e interativo. Por outro lado, a inteligência artificial associada à informações armazenadas, possibilitam a produção de sons musicais que lembram músicas de Bach, Beatles e muitos outros. Tais possibilidades são tantas que começam a trazer problemas de autenticidade do autor da música que está sendo produzida.

A MATEMÁTICA NA MÚSICA

Visto os períodos em que a música veio se desenvolvendo, mostrando as suas diferentes características, vamos nos deter agora, no aspecto da matemática neste desenvolvimento musical, objetivo desta pesquisa.
Como tudo que se estuda, deve-se dedicar maior tempo em entender as origens, no que causou o objeto de estudo. Desta forma, nosso estudo inicia-se na antiguidade, embora venha a se empregnar no que os historiadores delimitam como idade medieval. É na antiguidade que temos as escolas de Pitágoras, Platão e Aristóteles considerando a música como parte integrante da matemática. Na realidade, eram quatro divisões da matemática, o “quadrivium – quatro vias”, ou seja, a Aritmética, Geometria, Música e Astronomia. Além disso, completando as sete artes, existia o “trivium – três vias”, que seriam a Gramática, a Dialética e a Retórica.
A relação entre a matemática e a música teria começado com Pitágoras, usando um instrumento de uma única corda, o monocórdio. Neste instrumento ele descobriu as proporções relacionadas com os intervalos musicais: a oitava, a quinta e a quarta. Os pitagóricos perceberam que as consonâncias não dependiam do comprimento da corda solta no monocórdio, e sim da relação entre os comprimentos dos sons. Assim, dividiram a corda em 12(doze) partes iguais, marcando 11(onze) traços sobre a extensão da corda, no monocórdio. Esta divisão era conveniente devido ao número de divisores de 12, ou seja, 1,2,3,4,6 e 12. Ao monocórdio, com esta divisão, deu-se o nome de “cânon”, onde os traços foram numerados de 1 a 11, caindo o 12º traço na extremidade da corda. Associando um número a um som, pôde-se constatar mais facilmente as consonâncias equivalentes, do que no monocórdio puro (sem marcações). Assim, verificou-se a equivalência de sons obtidos ao traço 12 e ao traço 6, ao traço 10 e ao traço 5, ao traço 8 e ao traço 4, ao traço 6 e ao traço 3, ao traço 4 e ao traço 2, ao traço 2 e ao traço 1, conforme mostra a figura:

```
1     2     3     4     5     6     7     8     9     10    11    12
|___|___ |___|___ |___|____|___|___|____|____|____|
```

O intervalo entre esses pares de sons é sempre uma oitava(ciclo das sete notas de dó a si). Da mesma forma, observaram que associando os intervalos 12 ao 8, 9 ao 6, 6 ao 4, e 3 ao 2 obtinham um intervalo de quinta. E, ainda, se associassem os intervalos 12 ao 9, 8 ao 6 e 4 ao 3 obteriam um intervalo de quarta.
Pode-se observar, portanto, a matemática, através da aritmética, inserindo-se na música, com as propriedades das proporções, ou seja:

a) na oitava (metade do comprimento da corda)
12/6 = 10/5 = 8/4 = 6/3 = 4/2 = 2/1
b) na quinta (2/3 do comprimento da corda)
12/8 = 9/6 = 6/4 = 3/2
c) na quarta (¾ do comprimento da corda)
12/9 = 8/6 = 4/3

Estas relações entre diferentes comprimentos, associados à mesma consonância, permitiu aos pitagóricos projetar esta ocorrência para números superiores a 12 (doze). Portanto, esta relação sonora é importante na aritmética, no desenvolvimento do estudo das proporcionalidades entre frações, o que ainda não era de pleno domínio da Grécia antiga.
Estava, então, descoberta a relação entre a acústica e a aritmética.
Também, é dito,como lenda, que Pitágoras, ao passar em frente a oficina de um ferreiro, ouviu o som de cinco martelos batendo em uma bigorna, percebendo que os martelos soavam harmoniosamente, menos um deles. Assim, tentou estabelecer uma relação entre os harmonicos, o que não deu resultado, considerando a força exercida nos martelos. Decidiu, então, pesar os martelos e percebeu que cada martelo pesava 12, 9, 8 e 6 unidades de peso.
Observando esses números temos que : (6/8) = (9/12)   e   (6/9) = (8/12), que sabemos hoje ser uma propriedade das proporções. Pitágoras verificou, ainda, que 9 é a média aritmética de 6 e 12 e 8 é a média harmônica de 6 e 12, o que atualmente é fácil demonstrar.
Pitágoras, ainda não satisfeito, observou outras relações, como as proporções dos pesos entre si:
6 = (½) x 12
8 = (2/3) x 12
9 = (¾) x 12

Foram estas três últimas relações fizeram com que Pitágoras investigasse os sons produzidos por um instrumento básico, de uma corda só, chamado de monocórdio. A partir das divisões feitas na corda, conforme citado anteriormente, ele observou que o som produzido pressionando a metade da corda era o mesmo da corda original, porém mais agudo. Da mesma forma, observou que os sons produzidos na sexta e na nona marcas (marcas de 1 a 12 no monocórdio) combinavam com o som da corda original. Ao som produzido na proporção ½, chamada de oitava do som original. Ao som produzido na proporção ¾, chamada de quarta do som original e ao som produzido na proporção 2/3, chamada de quinta do som original.
Pitágoras verificou que os sons produzidos por outras proporções eram desagradáveis, ou seja, eram dissonâncias.
É interessante observar que as relações ½, ¾ e 2/3 envolvem o conceito pitagórico de que os números eram o verdadeiro elemento constituinte do mundo, onde o 1 era o ponto, o 2 era a linha, o 3 a superfície e o 4 era o sólido, o volume. Com os pontos formavam linhas, com linhas formavam superfícies e com estas formavam o volume. Assim 10 (1+2+3+4) era o número perfeito, pois continha toda a harmonia da natureza e do cosmo.
Pitágoras ligou o som à aritmética dando um passo inicial ao que hoje sabemos sobre som, ou seja, vibração que se propaga no ar, na forma de ondas e ao qual nossos ouvidos são sensíveis.

Como os pitagóricos acreditavam que tudo podia ser explicado através de relações entre números naturais, a descoberta das leis aritméticas na música representou uma grande motivação para explicar o universo através de relações entre números naturais.
Pitágoras, provavelmente, foi o maior estudioso da antiguidade. Atualmente, a escala musical que usamos é baseada na escala pitagórica, embora haja indícios que os chineses possuiam estudos de uma escala semelhante. Pitágoras, ao descobrir que a frequência da vibração de uma corda é diretamente proporcional ao seu comprimento, deu um passo enorme no desenvolvimento da música.

Também, Arquitas, seguidor de Pitágoras, verificou que:

A frequência da 5ª nota corresponde a média aritmética da primeira e da oitava:
f(5ªnota) ==> $M_A = (1+2)/2 = 3/2$
A frequência da 4ª nota corresponde a média harmônica entre as mesmas notas:
f(4ªnota) ==> $2 / (1 + (½)) = 4/3$

A média geométrica era usada para calcular a frequência das próximas oitavas. Tomando-se três oitavas (1ª,8ª,16ª) a nota central é a média geométrica das notas extremas, pois temos:
1ª --→ 1
8ª --→ 2
16ª --→ 4 , logo $2=\sqrt{4}$

O quociente entre as médias aritmética e harmônica determinava o intervalo de frequência entre dois tons:
1 tom = $M_A / M_H = (3/2) / (4/3) = 9/8$
Assim, Arquitas deu sentido às três médias na construção da escala musical.

Agora, vamos entender um pouco dos conceitos musicais para continuar nossa pesquisa sobre a relação matemática x música, destacando a utilização da matemática.

Podemos entender a música como uma combinação de sons estruturada numa certa cadência. Em uma definição muito simples música é "ritmo e som". Entendamos como ritmo o conceito mais simples para explicar, como a pulsação do coração, a nossa respiração, etc. A princípio, ritmo está ligado à contagem de tempo, concepção essencialmente matemática. Na música, entretanto, ritmo não se limita à contagem de tempo. Na realidade, os ritmos musicais possuem acentuações que se repetem com algum padrão, por isso temos vários ritmos musicais, que são estipulados conforme o tempo, no que denomina-se "compassos". Assim, temos:

a) compasso binário 12|12|12|12… (2 tempos)
b) compasso ternário 123|123|123… (3 tempos)
c) compasso quaternário 1234|1234|1234 … (4 tempos)

Com esses tempos, podemos posicionar as notas dentro da música criando vários genêros musicais.
Analisando a percepção do som, sabemos que o ouvido humano percebe como "sons" as ondas vibratórias que tenham 20 oscilações por segundo até 20000 oscilações por segundo. As de 20 a 200 oscilações por segundo são chamadas de "som grave" e as de 5000 a 2000 oscilações por segundo são chamadas de "som agudo". As vibrações intermediárias são chamadas de "sons médios". Uma corda esticada, como num violão, pode vibrar livremente com determinado valor de oscilações por segundo.

Segundo a teoria musical, a música é formada de três elementos principais:ritmo, harmonia e melodia, onde ritmo é o fundamental de toda a expressão musical, ou seja, sem ritmo não há música. A harmonia, segundo elemento mais importante, é o responsável pelo desenvolvimento da arte musical e, finalmente, a melodia é a imediata expressão de capacidades musicais. O que resulta da junção da melodia, harmonia e ritmo são as consonâncias (sons agradáveis) e dissonâncias (sons desagradáveis), que variam de cultura para cultura.
Voltando ao nosso estudo do som.

Sabemos que o som é uma onda vibratória e que, musicalmente, a frequência deste som define uma nota musical. Assim, para cada nota temos uma frequência diferente, medida em Hertz, como por exemplo a nota Lá (simbolo A) correspondendo a uma frequência de 440 Hz. Conforme descrito, nas experiências de Pitágoras, observa-se que se uma frequência é multiplicada por 2 (uma oitava acima) a nota continua sendo a mesma. No nosso exemplo o A(lá) passará a ter 880Hz. Se o objetivo fosse baixar a mesma nota bastaria vibrá-la a 220Hz. Assim, a cada nota musical teríamos a sua frequência original correspondente. As sete notas naturais, ou seja C (dó), D (ré), E (mi), F (fá), G (sol), A (lá), B (sí), foram criadas pelo monge italiano Guido d'Arezzo, conforme descrito anteriormente.
Analisando as frequências das notas C e B (dó e sí), os ocidentais verificaram serem muito próximas, como um "semitom". Desta forma, decidiram que as notas deveriam ter a mesma distância umas das outras, já que, por exemplo, a distância entre o Dó (C) e o Ré (D), em um "tom" era maior que a distância entre um Dó (C) e um Si (B). Verificando tal fato, através da análise de frequências, descobriu-se que 1,0595 era aproximadamente o fator que produzia a vibração da nota Si (B) para atingir a vibração da nota Dó (C). Desta maneira, foram criados os acidentes musicais conhecidos como "sustenidos", representado por #. Por exemplo a frequência do Dó (261,6Hz) multiplicada por 1,0595 resultaria em 277,2Hz, que seria o Dó sustenido (simbolizado por C#). Se repetíssemos a multiplicação, ou seja 277,2 x 1,0595, obteríamos a frequência de 293,6, que seria o nosso Ré (D).
Observe que, segundo esta formação obteríamos toda a escala cromática, ou seja, depois de multiplicar a nota Dó (C) por 1,0595, doze vezes, voltaríamos a nota Dó (C), porque 1,0595 = a raiz 12 de 2. Matematicamente isto é verdade pois a raiz 12 de 2 elevado à doze resulta em 2, e como sabemos, multiplicar uma nota por 2 resulta em obter a mesma nota uma oitava acima.
Esta escala cromática com 12 notas é também chamada de "escala temperada" (detalhada mais adiante nesta pesquisa). Como exemplo das notas numa escala de frequências com afinação em Lá (A), ou seja 440Hz, temos, conforme tabela a seguir:

Nota	Frequência (Hz)	Período (s)	Compto. de onda (m)
C (dó)	261,625519	0,003822	1,314856
$C_{\#}$ (dó sustenido)	277,182648	0,003508	1,241059
D (ré)	293,664734	0,003405	1,171404
$D_{\#}$ (ré sustenido)	311,126984	0,003214	1,105658
E (mi)	329,627533	0,003034	1,043602
F (fá)	349,228241	0,002863	0,985029
$F_{\#}$ (fá sustenido)	369,994385	0,002703	0,929744
G (sol)	391,995392	0,002551	0,877561
$G_{\#}$ (sol sustenido)	415,305688	0,002273	0,828308
A (lá)	440	0,002073	0,781818
$A_{\#}$ (lá sustenido)	466,163788	0,002145	0,737938
B (si)	493,883301	0,002025	0,696521

Nota-se, claramente, tratar-se de uma progressão geométrica das frequências, cuja razão é o valor numérico aproximado de 1,0595. Os intervalos entre as 12 notas são rigorosamente iguais.
Temos, então, que um "tom" é formado por uma frequência ou frequências relacionadas. Uma combinação aleatória de frequências chamaríamos apenas de "ruído". Destaca-se que J.S. Bach criou, na música barroca, uma escala musical , chamada de "temperada", onde passou a haver uma regra lógica para a construção da frequência das notas, ou seja:

a) duas notas de mesmo nome e consecutivas tem a frequência dobrada, isto é aumenta 3 dB por oitava.
b) duas notas consecutivas tem sempre a mesma razão do intervalo geométrico (PG), ou seja, aproximadamente 1,0595.

Vamos nos aprofundar um pouco mais na teoria musical usando a física.

A teoria matemática que descreve fenômenos ondulatórios desenvolvida por Jean Baptiste Fourier, no início do século XIX, passa a ter grande influência na música. Nesta teoria, qualquer onda sonora pode ser decomposta em uma combinação de ondas primitivas senoidais. A soma dessas ondas, formando ondas complexas é conhecida como a síntese de Fourier.
Seja a figura abaixo:

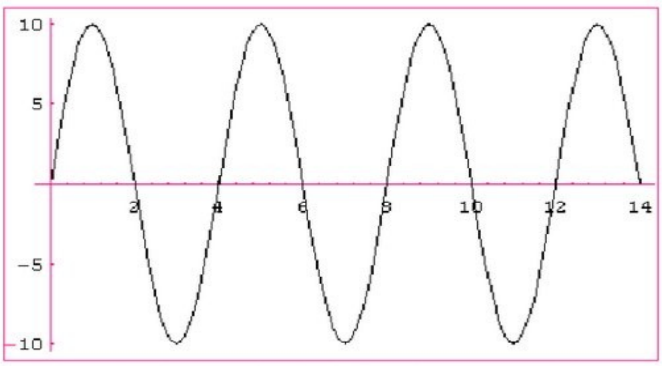


Figura 1 – Gráfico de uma função seno onde o eixo horizontal representa o deslocamento da onda com 3,5 ciclos e o eixo vertical a amplitude da onda igual a 10 unidades.

Nesta figura, temos quatro unidades de comprimento de onda e amplitude máxima de 10 unidades. A frequência, normalmente, é medida em Hertz(Hz), onde 1 HZ corresponde a um ciclo de vibração por segundo. Por exemplo, como já citado, a nota Lá tem 440Hz de frequência , comprimento de onda de 0,77m no ar e amplitude dependendo da energia usada na vibração. A energia de vibração vai se relacionar com o material utilizado. Assim, temos:

Som = $C_1 + C_2 + \ldots\ldots + C_n = \sum C_i$ (*)

onde n é um número inteiro qualquer e cada termo C_i corresponde a uma determinada frequência, multipla da frequência fundamental C_1 . Neste caso, C_1 é o tom fundamental e os demais termos são os sobretons. No exemplo do Lá (A), o tom fundamental seria de 440Hz, o primeiro sobretom (segundo harmônico, vibrará a 880Hz), o segundo sobretom (terceiro harmônico) vibrará a 1320 Hz , e assim por diante.
Em termos de percepção o som pode ser descrito através de sua altura, timbre e intensidade. O timbre está associado à série harmônica do som conforme a fórmula descrita em (*). A altura se refere à percepção dos graves e agudos e, quanto à intensidade significa dizer se o som é forte ou fraco, conforme o que diz a nossa audição.
Se tomarmos, por exemplo, duas notas musicais, uma mais grave com frequência mHz e outra mais aguda, com frequência nHz, onde m e n são números inteiros, o intervalo musical entre elas é , por definição, a razão n/m.
Outro conceito interessante é a raiz harmônica. Sejam duas notas com frequências mHz e nHz. Sua raiz harmônica é uma nota mais grave, produzida pela interferência entre elas, dada pelo máximo divisor comum (m.d.c.) das duas notas. Por exemplo, a raiz harmônica da combinação de um Dó com 264Hz e de um Sol com 396Hz é um Dó de 132Hz (m.d.c. entre 396 e 264).
O conceito de "parentesco" entre essas duas notas é definido pela raiz harmônica do intervalo e a mais grave das notas. Continuando o exemplo das frequências mHz e nHz, onde n>m e q=mdc(m,n), o parentesco entre as duas notas seria o inteiro m/q. Assim, num intervalo de uma oitava, temos a relação p/q = 2/1, ou seja, parentesco de primeiro grau. No intervalo de quinta perfeita, temos p/q = 3/2, parentesco de segundo grau e na quarta perfeita, p/q = 4/3, parenteco de terceiro grau. Essa ideia de parentesco é importante para os conceitos de consonância e dissonância dos sons.

Examinemos mais detalhadamente uma Série Harmônica.

Quando uma corda é tocada, ela vibra primeiramente em sua extensão total e depois efetua uma série de vibrações posteriores não mais na corda inteira, mas na sua metade, na terça parte, na quarta parte e assim por diante. Em termos de frequência, a série harmônica obedecerá ao padrão f_1, 2 f_1, $3f_1$, … Pode-se, então, representar a série harmônica de uma nota musical a partir de uma função periódica, cuja lei é uma soma de funções seno:

$f(x) = \sum k_n \ \text{sen}(2\pi n f_1 . x)$ onde n vai de 1 ao infinito
ou seja:
$f(x) = k_1 \text{sen}(2\pi n f_1 . x) + k_2 \text{sen}(2\pi n f_2 . x) + \ldots$
onde:
$f_n = n. f_1$, a frequência de cada harmônico, a partir da fundamental
k_n , a intensidade (amplitude) dos harmônicos
Observar que : k_n é decrescente e f_n é crescente.

Exemplo:
Seja G_1 com frequência de 100Hz. Os harmônicos superiores seriam 200Hz, 300Hz, 400Hz. Os coeficientes K_n, escolhidos aleatoriamente, devendo cedrescer a cada harmônico. Temos, então:

$f(x) = 10\,\text{sen}(2\pi.100\ .\ x) + 5\text{sen}(2\pi.200\ .\ x) + 4\text{sen}(2\pi.300.\ x) + \ldots$

Com este entendimento de séries harmonicas, podemos ter mais claro a utilização da série de Fourier na música. As ondas sonoras complexas, geradas por um instrumento musical, sempre poderão ser representadas por uma série de Fourier, composta das notas fundamentais e da série de harmônicos ou sobretons, cada um com a sua amplitude e fase. Poderíamos ter, como exemplo:

$P_1 = \text{sen}wt + 1/2\text{sen}2wt + 1/3\text{sen}3wt + 1/4\text{sen}4wt + 1/5\text{sen}5wt.$

Esclarecendo melhor a função da frequência senoidal, temos as figuras, a seguir:

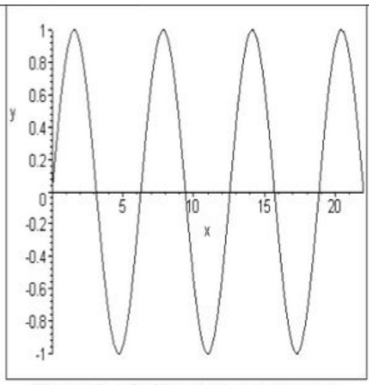


Figura 2 – Gráfico da função sen ωt.

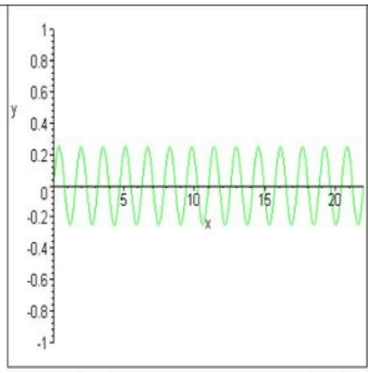


Figura 5 – Gráfico da função 1/4 sen 4ωt.

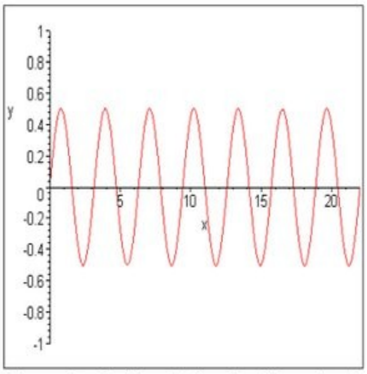


Figura 3 – Gráfico da função 1/2 sen 2 ωt .

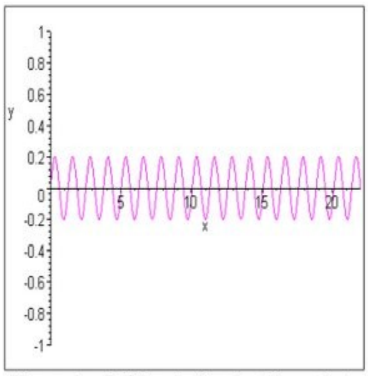


Figura 6 – Gráfico da função 1/5 sen 5ωt .

Continuando, agora, a pesquisa nos conceitos musicais, temos :

Sem detalhar o processo de construção da escala musical, temos que é feita nas sete notas principais : tom (C), tom (D), semitom (E), tom (F), tom (G), tom (A), semitom (B).
Na estrutura de 2 tons, 1 semitom, 3 tons e 1 semitom, duas soluções foram criadas para resolver o problema das notas intermediárias. Uma delas foi a introdução de notas alteradas (sustenidos e bemóis), citado anteriormente, formadas a partir da multiplicação ou divisão da nota original por 25/24. A multiplicação criava o sustenido e a divisão criava o bemol. Com isto a escala de sete notas aumentava consideravelmente podendo ter 21 notas, guardando algum parentesco com a tônica. A outra solução, ideal para teclados, foi dividir a afinação e distribuir esse erro entre as notas vizinhas. Na escala diatônica foi convencionado que a nota A (lá) corresponde a frequência de 440Hz. Este padrão foi adotado pela Organização Internacional de Padronização (ISO) com a norma ISO:16:1975, confirmada em 2017 e serve como referência para a afinação de instrumentos. No caso de diapasão típico, portanto, a frequência natural de vibração corresponde a nota A (lá).

Retornemos aos elementos básicos do som.

Altura tonal é caracterizada pelo som ser alto ou baixo, agudo ou grave. Quanto mais agudo maior a vibração e, quanto mais grave, menor a vibração. Portanto a frequência e a altura tonal estão relacionadas logaritmicamente. Volume do som pode ser forte ou fraco. No osciloscópio é visto como a diferença na altura das ondas, ou seja relacionado com a amplitude. Quanto maior a amplitude mais forte é o som. Assim, som alto, do ponto de vista da amplitude, corresponde a um som forte. Em relação ao timbre, temos que, em geral, dois instrumentos não produzem o mesmo som ao serem tocados na mesma altura tonal e o mesmo volume. A diferença é o timbre. No osciloscópio, timbres diferentes, aparecem com formas de ondas diferentes. O que diferencia os instrumentos é a distribuição de frequências e das formas de ondas sonoras. Instrumentos de corda são, em geral, mais ricos em termos harmônicos e possuem uma forma de onda mais complexa. A frequência fundamental de ressonância dos instrumentos de corda é dado por:

$f_0 = (1/2L) \surd (T/\rho)$

onde L= comprimento da corda
T= tensão
ρ= densidade linear

As frequências presentes na corda são múltiplos inteiros n de f_0 , ou seja:

$f_n = (nv) / (2L)$
onde:
v = velocidade do som no meio
n= número da harmônica (1,2,3,….)
L=comprimento da corda
f_n= frequência da “n” harmônica

Observe que a sequência se repete, sendo cada sequência chamada de oitava. Quanto mais oitavas contem o instrumento, maiores são as combinações possíveis para enriquecer a melodia. O órgão é o instrumento com a maior gama de oitavas, logo de frequências.

A frequência padrão de afinação dos instrumentos é o Lá (A) com 440Hz. Assim, temos as frações de Dó (C):

C(dó) – 1
D(ré) – 9/8
E(mi) – 5/4
F(fá) – 4/3
G(sol)- 3/2
A(lá) – 5/3
B(si) – 15/8

Com estas correspondências obtemos a frequência desejada, procedendo:
1º) observa-se a altura da nota para saber em qual oitava se encontra, usando a oitava de A, 440Hz, acima.
2º) queremos, por exemplo, saber é o C(dó) anterior ao A(lá). Basta fazer a regra de 3 simples:
440 ------- 5/3
x -------- 1
logo, 5x = 1320 onde x = 1320/5 = 264 Hz

Como as oitavas tem razão dobrada, basta multiplicar por 2 para achar a sua oitava acima , ou dividir por 2 para achar a sua oitava abaixo.

Voltando, agora, a nossa atenção para os compassos musicais, definidos anteriormente.

Nos compassos musicais, a matemática também está presente. Lembrando que cada compasso está dividido em partes que chamamos de tempos. A música é dividida em vários compassos. Os compassos dividem a música em partes "iguais". Definem a unidade de tempo, o ritmo e o pulso da música. Os compassos, embora representados como frações, não são matematicamente falando. Portanto, 4/4 é diferente de 2/2, por exemplo, já que é diferente a unidade de tempo. No caso, lê-se quatro por quatro e dois por dois.
Apesar disso, chamamos de numerador o número de cima e de denominador o de baixo. O compasso é dividido em tempos, de mesma duração, formados de quantidades diferentes de notas. Os tempos podem ser:

Binário – 2 tempos (numerador 2)
Ternário – 3 tempos (numerador 3)
Quaternário – 4 tempos (numerador 4)
Complexos – diversos compassos simples.

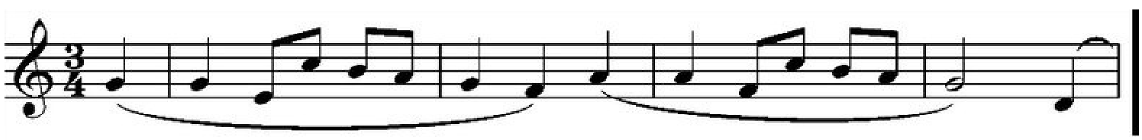
Na formação do compasso, temos os conceitos de :
UT – unidade de tempo (figura que preenche cada tempo do compasso)
UC – unidade de compasso (figura que preenche o compasso inteiro)
Lembrando sobre as figuras e pausas:

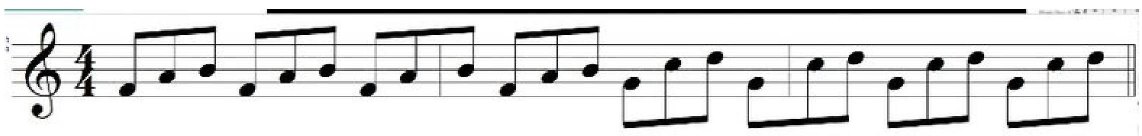
Nome	Som	Pausa	Valor Proporcional
Semibreve	𝅝	𝄻	1 (inteiro)
Mínima	𝅗𝅥	𝄼	1/2
Semínima	♩	𝄽	1/4
Colcheia	♪	𝄾	1/8
Semicolcheia	𝅘𝅥𝅯	𝄿	1/16
Fusa	𝅘𝅥𝅰	𝅀	1/32
Semifusa	𝅘𝅥𝅱	𝅁	1/64

Assim, por exemplo, se a UT for uma semínima e o compasso 4/4, para preencher o compasso serão necessárias 4 semínimas. O numerador determina a quantidade de tempos do compasso. O denominador determina qual a figura que preenche o tempo do compasso. Podemos ter os seguintes tipos de compasso:

Compasso simples
É aquele em que cada unidade de tempo corresponde à duração determinada pelo denominador do compasso. Por exemplo, 2/4 são dois pulsos com duração de ¼ (uma semínima) 2/2 são dois pulsos com duração de ½ (uma mínima).
Compasso composto
É aquele em que cada unidade de tempo é subdividida em 3 notas, cuja duração é definida pelo denominador do compasso. Por exemplo, o compasso 6/8, o denominador indica uma semibreve dividida em 8 partes (colcheia) e o numerador indica quantas figuras preenchem o compasso. No entanto, a métrica do compasso é binária, ou seja dois pulsos a cada compasso. Costuma-se obter um compasso composto, multiplicando-se um compasso simples por 3/2. Por exemplo:
2/4 x 3/2 = 6/8 (binário composto)
¾ x 3/2 = 9/8 (ternário composto)
4/4 x 3/2 = 12/8 (quaternário composto)

Como exemplos de compassos, temos as figuras:





Temos, desta forma, o compasso ternário (¾) representado por 3 semínimas e o quaternário por quatro semínimas. Da mesma forma, o binário seria representado por duas semínimas. Essas figuras de notas e mais as figuras de pausas compoem cada compasso da música.

Voltemos, agora, ao estudo da frequência sonora, especificamente num instrumento, no caso o violão.

Os instrumentos de corda, como o violão, produzem sons a partir da vibração de suas cordas. O modo de vibração com a frequência mais baixa é chamado de modo fundamental ou primeiro harmônico, conforme já visto. Assim, podemos ter:

1º harmônico $f = f_0$
2º harmônico $f = 2f_0$
3º harmônico $f = 3f_0$ …

Conforme visto anteriormente, a frequência fundamental de uma corda esticada é uma função do seu comprimento L, da sua densidade d, da área A da sua seção transversal e da tensão T a que ela está sujeita. Esta frequência é calculada por:

$f = (1/2L) \sqrt{(T/dA)}$

Desta forma, é possível afinar cada corda do violão pela variação de sua tensão. Esticando a corda, através das tarraxas do violão, a vibração fica mais alta, ou seja, o som fica mais agudo. O comprimento da corda pode ser diminuído pressionando com os dedos nos trastes do braço do violão.
Voltando ao ciclo de quintas de Pitágoras (razão 2/3), apresentado anteriormente.

Em termos de comprimento de corda, a quinta de uma nota musical qualquer é determinada por: $Q = 2/3 \cdot X_n$

Partindo da razão definida para a quinta (2/3), pode-se determinar o ciclo das quintas da seguinte maneira:

Seja uma nota de referência C (dó), por exemplo. Deve-se encontrar a quinta de C(dó), depois a quinta em relação à quinta, e assim por diante. Para tal, partimos de dois resultados já conhecidos, que definem o intervalo de uma oitava:

. a quinta de C_n é G_n
. a quinta de A_n é C_{n+1} (próxima oitava)

Assim, de maneira genérica, temos: $Q_m = (2/3)^m \cdot C_1$
Em termos de comprimento de corda, uma oitava de ordem n (entre C_n e C_{n+1}) é definida pelo intervalo $[1/2^n , 1/2^{n-1}]$; onde n pertence a N^*
Genericamente, conforme já vimos, para transpor uma nota X_n de uma oitava qualquer à primeira oitava, usa-se: $X_1 = 2^{n-1} \cdot X_n$

Porém, m ciclos de quintas não coincide com um ciclo de oitavas no conceito desenvolvido por Pitágoras. Sejam as dúvidas: “como podemos resolver m e n na equação abaixo”:

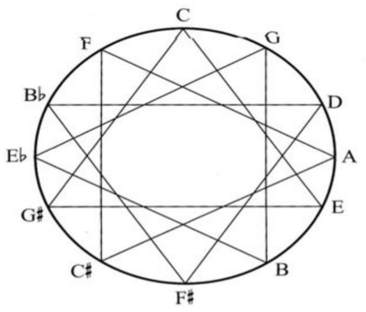
$(3/2)^m = 2^n$

O mais próximo seria 12 ciclos de quintas e 7 de oitavas, já que:

$(3/2)^{12} = 129{,}746$ e $2^7 = 128$

Da mesma forma, na escala pitagórica, o tom = 9/8 e o semitom = 256/243, não correspondem aos valores atuais.

Isto ocorria porque Pitágoras usava apenas os números racionais. Com a utilização dos números irracionais, usado mais tarde por Bach, temos uma melhor aproximação, já que o semitom equivale a raiz 12 de 2, ou seja aproximadamente 1,059, melhor que 256/243 que é aproximadamente 1,053. Da mesma forma a quinta de Bach é raiz 12 de 2^7, aproximadamente 1,4 e a quinta valendo 1,5.
O ciclo de quintas pode ser explorado através de vários triângulos no interior de um círculo, onde cada uma das 12 pontas em volta do círculo representam uma nota, com forme a figura:



Este círculo, criado por Pitágoras foi atualizada pelos teóricos da música ocidental. O círculo se propõe a descobrir quais notas levam sustenido ou bemol num determinado tom, bastando contar na direção dos ponteiros do relógio, a partir da tônica.
Assim a escala temperada, usada por Bach, é mais aperfeiçoada que a usada por Pitágoras. Na escala pitagórica a diferença entre uma quinta e uma quarta era definida como um tom inteiro, na relação 8:9. Assim, tínhamos o tom na proporção 9/8 e o semitom na proporção 256/243. Na escala temperada, introduzida por Bach no sec. XVIII, ajustando os intervalos da escala pitagórica, de forma que uma oitava era dividida em intervalos que permitiam tocar em qualquer tonalidade. Isto resultou em uma escala de 12 semitons, igualmente distribuídos pela oitava. Nesta escala, um tom inteiro já não é definido pela razão 9/8, mas por 2 semitons, cada um deles expresso po raiz 12 de 2, que elevado ao quadrado resulta em aproximadamente 1,1225.
Assim sendo, se chamarmos de i ao intervalo entre cada semitom da escala temperada, um intervalo de quinta (7 semitons) é i^7 , um intervalo de quarta (5 semitons) é i^5, um intervalo de oitava (12 semitons) é dado por i^{12} , e assim por diante. Pode-se, portanto, calcular qualquer outro intervalo da escala temperada, usando a expressão: $i_n = 2^{n/12}$, onde n é o número de semitons contido no intervalo.
Por exemplo, para calcular a frequência E (mi), quinta acima (7 semitons) de um A (lá) de 440Hz, temos:

$F_1 = f_0 . 2^{N/12} = 440 . 2^{7/12} = 440 \times 1{,}498 = 659{,}25Hz$

Continuando a verificar a matemática na música, temos na escala musical:

1- tônica --→ razão 1/1
2- oitava --→ razão ½
3- quinta --→ razão 2/3
4- quarta --→ razão ¾

A consonância, segundo os pitagóricos seria mais bela quanto mais simples fosse a relação proporcional entre os sons, no caso, 1/1, ½, 2/3 e ¾.

Saindo do limite da primeira oitava, podemos encontrar frações equivalentes tais como:
1- oitavas --→ $(1/2)^n$
2- quartas --→ $(1/2)^n$. ¾
3- quintas --→ $(1/2)^n$. 2/3

Temos o intervalo de oitava, onde c é o comprimento da corda:

Dó	Ré	Mi	Fá	Sol	Lá	Si	Dó
c			3c/4	2c/3			1c/2

Um semitom é, pelo sistema musical ocidental, o menor intervalo possível entre duas notas. Dois semitons sucessivos, portanto, dão o tom. O sistema temperado, que utilizamos, estabelece que todos os semitons possuam tamanhos iguais. A escala diatônica seria:

C D E F G A B C
t t st t t t st

Já a escala cromática é a sequência de 12 semitons consecutivos:

C $C_{\#}$ D $D_{\#}$ E F $F_{\#}$ G $G_{\#}$ A $A_{\#}$ B C

Do conjunto de notas da escala cromática, vários subconjuntos podem ser extraídos, caracterizando os sistemas atonal e tonal. A mudança do sistema tonal para atonal se deu de forma gradativa. Caracterizou-se como sistema atonal aquele que não apresente uma hierarquia entre as notas, diferente da hierarquia do sistema tonal. Schonberg organizou igualmente os doze sons da escala cromática, sujeitos a uma relação de ordem e não hierárquico, criando o dodecafonismo serial. Ele foi o primeiro compositor que aplicou, de forma evidente, a matemática na composição musical. Com este método, Milton Babbit e David Lewin demonstram o teorema Hexacordal que será abordado mais adiante, nesta pesquisa.

Voltemos, agora, ao estudo dos intervalos musicais.

Genericamente, para transpor uma nota X_n de uma oitava qualquer à primeira oitava pode se usar : $X_1 = 2^{n-1} . X_n$

Exemplo:
Seja uma nota tocada numa corda pressionada na altura 2/11 do seu comprimento.

Verifica-se que $1/2^3 < 2/11 < 1/2^2$
Portanto, essa nota pertence à 3ª oitava. Logo, para encontrar uma nota na 1ª oitava, basta fazer n=3 e temos que:

$X_1 = 2^2 . 2/11 = 8/11$, ou seja, 2c/11 e 8c/11 equivalem à mesma nota.

Assim, podemos definir as relações proporcionais dos comprimentos das cordas em relação à corda solta (comprimento c), conforme abaixo:

C	D	E	F	G	A	B	C
1c	8c/2	64c/81	3c/4	2c/3	16c/27	128c/243	1c/2

Define-se intervalo entre duas notas da escala como sendo a razão entre o comprimento relativo a cada uma das notas. Assim, para as notas consecutivas, temos:
$I = (X_k) / (X_{k+1})$ para notas consecutivas
e
$I = (X_k) / (X_m)$, $k \leq m$, para notas não consecutivas

Pode-se estender o conceito de intervalo, em termos de frequências de notas, ou seja:

Se $X_k = 1/f(X_k)$, temos que:

$I = f(X_{k+1}) / f(X_k)$, para notas consecutivas
e
$I = f(X_k) / f(X_m)$, $k \geq m$ para notas não consecutivas.

Poderíamos, então, representar os intervalos de frequências, como :

C	D	E	F	G	A	B	C
1f	9f/8	81f/64	4f/3	3f/2	27f/16	243f/128	2f

Comparando, agora, a Escala pitagórica com a Escala temporal.

Na pitagórica os intervalos entre um C(dó) e um D(ré), ou entre um D(ré) e um E(mi), não eram os mesmos que os intervalos de E(mi) e F(fá) ou B(si) e C(dó). Exemplo:

f(E) / f(D) = (81/64) / (9/8) = 1,125 = 9/8
f(F) / f(E) = (4/3) / (81/64) = 1,0535 = 256/243

Como os pitagóricos só trabalhavam com números inteiros, não poderiam ajustar os cálculos. Novas ideias apareceram com o Renascimento, surgindo o que se chama temperamento da escala musical. Matematicamente, a escala temperada possui as notas igualmente espaçadas entre si, ou seja, seus intervalos são iguais. J,S.Bach, em sua obra barroca, "O cravo bem temperado", didaticamente usa os doze tons da nova escala .
Nesta escala foram introduzidas 5 notas na escala original de 7 notas. Assim foram criados os acidentes musicais (sustenidos e bemóis), conforme citado anteriormente:

C	$C_{\#}$	D	$D_{\#}$	E	F	$F_{\#}$	G	$G_{\#}$	A	$A_{\#}$	B	C
	D_b		E_b			G_b		A_b		B_b		

Pode-se entender que, matematicamente, o temperamento nada mais é do que a interpolação geométrica entre 1 e 2.
Deve-se perceber que, nesta PG, a oitava agora exerce o papel do 13º som (13º termo da PG).
Assim, para calcular a razão dessa PG, sabemos que:
$f_{13} = f_1 \cdot q^{12}$, ou seja $2 = 1.\ q^{12}$, logo $q = 2^{1/12}$, aproximadamente 1,0595
Assim, nota-se que a frequência de cada nota é igual à nota anterior multiplicada por 1,0595, ou seja, cada frequência é aproximadamente 6% maior que a anterior.
Tal fato é usado na afinação dos instrumentos. Por exemplo, no violão, a 5ª corda solta corresponde ao A_2 = 110Hz. O $A_{\#2}$ seria obtido multiplicando-se 110 por 1,0595 e o A_{b2} seria obtido dividindo-se 110 por 1,0595.
A escala temperada também pode ser interpretada como uma escala logarítmica de base 2 , ou seja:
2^0 , $2^{1/12}$, $2^{2/12}$, …………….. , $2^{11/12}$, 2^1

Assim,

$\log_2 2^0 = 0$, $\log_2 2^{1/12} = 1/12$ ……….. $\log_2 2^1 = 1$

Considerando que esta escala logarítmica é uma PA, onde um semitom (1/12) é a sua razão, temos 0; 1/12; 2,12; ...

Se o intervalo entre suas notas consecutivas X e Y, for I, então:

$\log_2 I = \log_2 f(Y) - \log_2 f(X)$

Vamos, agora, explorar o teorema hexacordal, apenas citado anteriormente.

Da escala cromática, o teorema hexacordal aborda as estruturas dos intervalos dos hexacordes a partir de um conjunto de 12 notas.
Seja um conjunto de 12 notas da escala cromática, escolhido em qualquer ordem. Deste conjunto, pode-se formar subconjuntos de notas e somente alguns desses subconjuntos são musicalmente significantes.

Destes subconjuntos destacamos o hexacorde, que é um acorde com 6 notas. Lembrando que um conjunto A é um acorde somente se:

a) A é diferente de zero
b) A está contido no conjunto das 12 notas (Z_{12})
c)#A = m, tal que m pertence a { 2, …, 12}

Se m = 6 , o acorde chama-se hexacorde. Sendo Z_{12} o conjunto das 12 notas musicais, ou seja, {C, $C_{\#}$,D, $D_{\#}$E, F, $F_{\#}$,G,$G_{\#}$,A,$A_{\#}$,B} . Para facilidade de representação, podemos escrever tais elementos desse conjunto com suas respectivas distâncias, ou seja: {0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11}
Desta forma, podemos ter vários hexacordes, como por exemplo:
A = {0,1,2,3,4,5} e B = {6,7,8,9,10,11,12}
A' = {0,2,4,6,8,10} e B' = {1,3,5,7,9,11} e assim sucessivamente.

De acordo com a análise combinatória, podemos formar 924 subconjuntos, ou seja, combinação de 12, 6 a 6, que dá 924. Entretanto, sabemos que nem todos esses subconjuntos sejam musicalmente utilizados.
E, ainda seguindo a análise combinatória, de cada hexacorde, podemos formar 15 pares para avaliação, ou seja, combinação de 6, 2 a 2, que dá 15.
Para estudo, portanto, podemos avaliar 15 pares em cada hexacorde escolhido.
Seja , por exemplo, a escolha de A = { 1, 2, 5, 8, 10, 11}, que nos dá os pares:
(1,2) (1,5) (1,8) (1,10) (1,11)
(2,5) (2,8) (2,10) (2,11)
(5,8) (5,10) (5,11)
(8,10) (8,11)
(10,11)
Fica restando o conjunto B, com os elementos não utilizados, ou seja:
B = { 0,3,4,6,7,9}
Poderíamos representar isto numa tabela com os 12 elementos, mostrando a distribuição dos subconjuntos, tomados no exemplo:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
B	A	A	B	B	A	B	B	A	B	A	A

Assim, o intervalo de uma nota x para uma nota y é dado por y – x(mod12), considerando a menor distância independente do sentido para à direita ou para à esquerda.

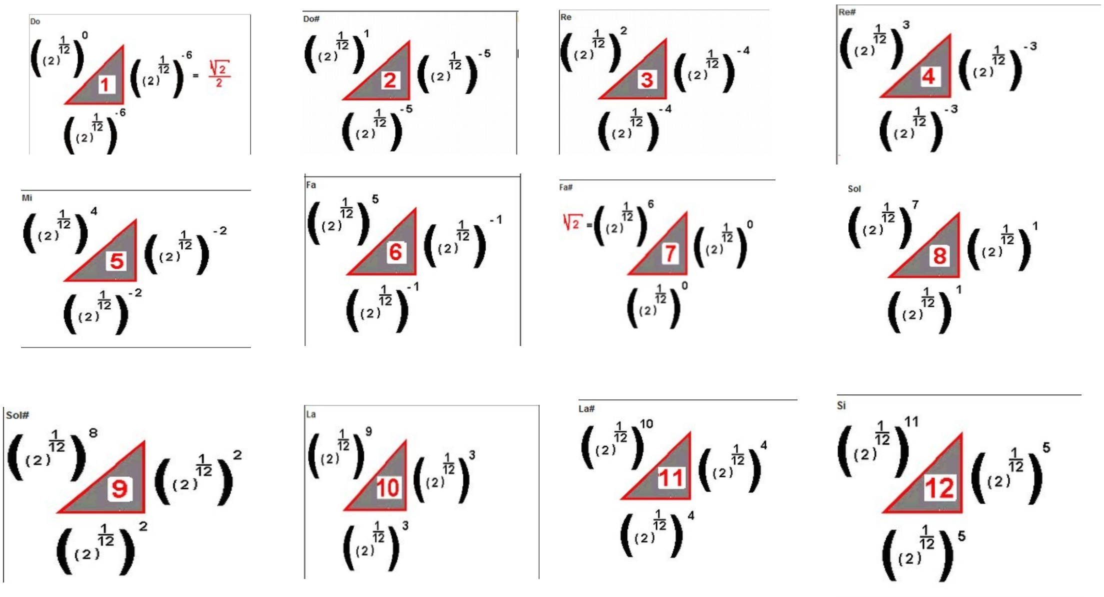
No nosso exemplo, com o escolhido subconjunto A, imediatamente temos o seu complemento, ou seja, o subconjunto B
Usando, agora, o conceito de transposição T_n , tal que indica quantos semitons cada nota será acrescida. Assim, se escolhermos n=2, temos um novo hexacorde, ou seja {3,4,7,10,0,1}, já que A={1,2,5,8,10,11}.
Usando, agora, o conceito de inversão (x → 12 – x) em A, temos novo subconjunto {11,0,7,4,2,1}
Portanto, os hexacordes :{1,2,5,8,10,11} (original);{0,3,4,6,7,9} (complemento);{3,4,7,10,0,1} (transposição T_2) e {11,0,7,4,2,1} (inversão) possuem sonoridades semelhantes ou seja:
{$C_{\#}$, D, F, $G_{\#}$, $A_{\#}$, B} (original)
{C, $D_{\#}$, E, $F_{\#}$, G, A} (complemento)
{$D_{\#}$, E, G, $A_{\#}$, C, $C_{\#}$} (transposição T_2)
{B, C, G, E, D, $C_{\#}$ } (inversão)

Vamos nos deter um pouco mais nos intervalos musicais.

Na escala cromática, se tomarmos um semitom por i e f_0 como a frequência da tônica, temos: $f_0 \,.\, i^{12} = 2.\, f_0$, logo $i^{12} = 12$, portanto i igual a raiz 12 de 2 ≈ 1,0595, conforme já sabemos.
O número de oitavas que separam duas notas relacionadas com suas respectivas frequências, pode ser calculado por:
$x = \log_2 (f_t / f_0)$
onde x = quantidade de oitavas que separam as notas relacionadas
f_t = frequência final
f_0 = frequência inicial
Então, se $0 < x < 1$, as notas estão na mesma oitava, caso contrário ($x>1$), estão em oitavas diferentes.
Como cada oitava da escala cromática tem 12 intervalos i, basta multiplicarmos o valor encontrado por 12i para termos o intervalo entre as duas notas. Por exemplo:
Na faixa de som audível, temos 20Hz a 20000Hz, portanto, calculando x, temos:
$x = \log_2 (20000/ 20) = x = \log_2 (1000)$
Então:
$2^x = 10^3 \rightarrow x \log 2 = 3 \log 10 \rightarrow x = 3 / \log 2$
Como $\log 2 \approx 0{,}3010 \rightarrow x \approx 9{,}9658$ (a faixa de 20Hz a 20000Hz corresponde a pouco menos de 10 oitavas)

O matemático Bernardus Vallumbrosius, resolveu construir triângulos retângulos isósceles, cujas hipotenusas tivessem uma sequência constituída de valores que representassem os sucessivos intervalos musicais e descobriu que os catetos poderiam ser representados por potências de base 2 e expoentes múltiplos de 1/12, como já vimos anteriormente. Assim, se C é o valor dos catetos congruentes, temos:
$C^{2\,+} C^2 = [(2^{1/12})^n]^2 \rightarrow C^2 = 2^{\,(2n/12) - 1} \rightarrow C^2 = [(2^{1/12})^{n-6}]^2 \rightarrow C = (2^{1/12})^{n-6}$
A hipotenusa seria da forma $(2^{1/12})^{n-6}$.
O matemático Luiz Netto, da Faculdade de Filosofia, Ciências e Letras, se Santo André, SP, denominou esses triângulos de vallumbrosianos e os representou assim:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
1	1,059463	1,122462	1,189207	1,259921	1,334839	1,414213	1,498307	1,587401	1,681792	1,781797	1,887748	2,00000
$(2^{\frac{1}{12}})^0$	$(2^{\frac{1}{12}})^1$	$(2^{\frac{1}{12}})^2$	$(2^{\frac{1}{12}})^3$	$(2^{\frac{1}{12}})^4$	$(2^{\frac{1}{12}})^5$	$(2^{\frac{1}{12}})^6$	$(2^{\frac{1}{12}})^7$	$(2^{\frac{1}{12}})^8$	$(2^{\frac{1}{12}})^9$	$(2^{\frac{1}{12}})^{10}$	$(2^{\frac{1}{12}})^{11}$	$(2^{\frac{1}{12}})^{12}$



Se n = 0 → $(2^{1/12})^n = 1$ e $(2^{1/12})^{-6} = \sqrt{2} / 2$
Se n = 12 → $(2^{1/12})^{12} = 2$ e $(2^{1/12})^6 = \sqrt{2}$
Desta forma, conclui-se que os intervalos musicais da escala cromática podem ser representados em um triângulo retângulo isósceles.

Como curiosidade, em relação às cores, também podemos estudar suas frequências.

Assim como as notas musicais, também as cores estão relacionadas com frequências. Assim como sabemos, que em relação à audição, o ser humano consegue ouvir numa faixa de 20Hz a 20000Hz, o espectro de luz visível pelo ser humano vai de 393.10^{12}Hz (vermelho) a 786.10^{12} (violeta), correspondendo a faixa de som de 357,4Hz a 714,8Hz.
Relacionando-se som e cores, podemos ter:
Se a cada oitava as notas dobram a frequência, podemos ter:
$(2^{1/12})^x = 786.10^{12}$ → $2^{x/12} = 786.10^{12}$ → $x/12 \log 2 = \log (786.10^{12})$ → $x = (12\log(786.10^{12}))/\log 2$
logo $x \approx 593,78$
Se cada oitava tem 12 intervalos, temos que 593,78 / 12 ≈ 49,48, que é o número de oitavas correspondente à luz violeta.
No entanto, vemos que a relação entre o espectro de luz visível e as notas musicais somente são percebidas onde a frequência varia de 357,4Hz a 714,8Hz.
Se fizermos uma tabela de frequências e oitavas, teríamos:

Oitavas	Frequências(Hz)
1	1 a 2
2	2 a 4
3	4 a 8
4	8 a 16
5	16 a 32
6	32 a 64
7	64 a 128
8	128 a 256
9	256 a 512
10	512 a 1024

Analisando a tabela, observamos que 357,4Hz a 714,8Hz, está entre a 9ª e a 10ª oitava.
De forma geral, podemos ter $y = 49,48 - x$, onde x é a oitava onde se encontra a nota escolhida e finalmente utilizamos a equação $f_n = (2^{1/12})^{12y} = f_l$ onde:
f_n = frequência da nota
f_l = frequência da luz
$y = 49,48 - x$

Por exemplo:
Seja determinar a frequência da luz, correspondente a nota G_3 (sol), cuja frequência é aproximadamente 391,9954Hz
Observando-se a tabela anterior, verificamos ser x = 9, logo
$y \approx 49,48 - 9 = 40,48$
se y = 40, f_n = 391,9954Hz
Então: $391,9954 . (2^{1/12})^{12.40}$ → $f_l \approx 4,310046$ Hz seria a frequência de G_3.

Analisando, um pouco mais tecnicamente o som.

Sons complexos são formados por ondas simples (senoidais), que são os harmônicos e a fundamental. Sons com vibrações regulares são considerados musicais e com vibrações irregulares são chamados de não-musicais.
A função matemática para representar a música, então, será necessário ter como termos o deslocamento e o tempo. Sendo assim, se um ponto percorrer numa circunferência f vezes em um segundo, temos a função y = sen x, que poderá ser representada por y = sen2π.f.t.
Tons puros são os sons que não tem nenhum outro componente, tais como harmônicos, constituindo-se numa frequência simples. A forma de onda de um tom puro é sempre senoidal. Tons puros só podem ser criados artificialmente, por exemplo, eletronicamente.
Para um computador recriar um fenômeno analógico, como o som, é necessário converter os dados analógicos em digitais, que é feito através de um circuito ADC(conversos analógico digital). Para reproduzir o som faz-se o processo inverso, ou seja, DAC (conversor digital analógico). A partir de 1976, com a difusão dos microcomputadores e linguagens de programação de alto nível e grande portabilidade, vários programas musicais foram criados. A inteligência artificial (IA) tem sido importante na história da composição musical, através de três tipos: sistemas composicionais, sistemas de improviso e sistemas de performance musical. A representação da informação musical é da forma MIDI (Music Instrument Digital Interface). Em geral, arquivos MIDI (extensão .mid ou .smf) contém o equivalente a uma partitura para o computador. Seu código são instruções para um sintetizador que, por sua vez, interpreta o código e o executa, podendo usar vários timbres de instrumentos simultâneamente. Como curiosidade, o primenro sintetizador nasceu em 1963 e então começaram a surgir diversos modelos aperfeiçoados deste aparelho.

CONCLUSÃO

Podemos ver, nos detalhamentos mostrados no capítulo anterior (Matemática na Música), que é inegável a inserção da matemática na ciência musical. É claro, que não foram abordados todos os tópicos possíveis dessa inserção. O importante era demonstrar que sem a matemática a música seria constituída apenas de barulhos, ruídos, sons sem qualquer sensibilidade do que conhecemos como música.
A estruturação da linguagem musical precisou de conceitos matemáticos para se realizar. Isto nos foi mostrado desde os primeiros passos feitos por Pitágoras. Sua percepção aos sons que ouvia e sua vivência matemática deram início a uma organização da música, levando em conta vários aspectos matemáticos, conforme detalhado no capítulo anterior.
Além disso, como o som é um fenômeno físico e a música requer uma organização sonora, todos os estudos da física sobre ondas sonoras, com todo o arcabouço matemático necessário para fazer parte, também, do estudo da música.
Com o avanço da tecnologia digital e sua aplicação em aparelhos sonoros, mais aplicações matemáticas serão inseridas no estudo da música, como já vem acontecendo em nossos dias. Essa inserção, inclusive, modifica alguns conceitos musicais existentes, assim como podem causar problemas de direitos autorais. De qualquer forma, mostra-se a matemática cada vez mais impregnada na música.
Do que foi citado anteriormente, sobre a matemática na música, fica claro que o assunto não foi explorado em sua totalidade. É claro que muitos mais aspectos matemáticos existem na teoria musical. O que se pretendia era mostrar os principais aspectos e como eles são importante na ciência musical. Entretanto, face de estar estudando teoria musical (mais que aprendendo a tocar violão), quero acrescentar um pouco da matemática que uso neste aprendizado.

Assim, verifico, de imediato, uma enorme noção de frações, que pode ser percebido desde os primeiros estudos de Pitágoras, conforme já relatado nesta pesquisa.
Observo que a estruturação dos compassos (binário, ternário ou quaternário) definida a sua unidade de tempo (mínima ou semínima, por exemplo) requer bom entendimento da soma de frações. Se partirmos para um compasso composto, já necessitamos de um entendimento maior, a multiplicação de frações. Quando se quer mudar o andamento da música, acelerando-a ou desacelerando-a, novamente precisamos entender a propriedade das frações para modificar as figuras da partitura.
Se pensarmos na composição musical, então, mais matemática será necessária não só para as figuras das notas como suas pausas respectivas para manter os compassos equilibrados. E, se nos dedicarmos à música contemporânea com todo o seu modernismo tecnológico, aí então, teremos uma enorme aplicação da matemática na utilização dos diversos aparelhos eletrônicos de som que, nos dias de hoje, fazem parte de todas as apresentações musicais. Lembrar que os compositores de música eletroacústica geram suas composições em estúdios e laboratórios. Além disso há que se destacar a criação de programas voltados ao ensino da música, principalmente para pessoas com algum tipo de deficiência.
Enfim, desnecessário tecer mais detalhes em algo que é fácil sentir, ou seja, a matemática cada vez mais estará impregnada na música, tanto no que se refere ao seu aprendizado como na sua execução.

Bibliografia

1. História da Música (olivier.psc.br/compositores/historiamusica.htm)
2. Música na Idade Média (historia_da_musica.blogs.sapo.pt/1085.html)
3. História da Humanidade: A música na Antiguidade – Josemar Bessa
4. Música: Um pouco de história-Disciplina e Arte (arte.seed.pr.gov.br)
5. A História da Música- A Antiguidade (musicadoradio.com.br)
6. História da Música na Antiguidade e Idade Média (historiadamusicaantiga.blogspot.com)
7. Johan Sebastian Bach e a fascinante relação entre a música e matemática (nototerapia.com.br)
8. Matemática e Música: Sistematização de analogias entre conteúdos matemáticos e musicais, Revista Portuguesa de Educação, vol. 28, nº 2
9. Modelagem matemática aplicada à composição musical, Maria Aparecida S. Cruz e Jonatas Manzolli, Universidade Estadual de Mato Grosso do Sul
10. Todo acerca de la teoria de conjuntos em Musica, Rafael Losada Liste, (anarkasis.net/pitagoras/menu.htm)
11. Computação Aplicada à Educação Musical; Desafios e prespectivas ao planejamento docente no contexto da Educação Inclusiva, Amanda M. Melo, Carla E. Lopardo e Guilherme M. Melo, Unipampa
12. Música Robótica: Bach, The Beatles e Gershwin ressuscitam através da inteligência artificial, Luis Pellegrini
13. Introdução à Composição Musical, E.M. Miletto, L.L. Costalonga, L.V. Flores, E.F. Fritsh, M. S. Pimenta e R.M. Vicari, Universidade Federal do Rio grande do Sul
14. Matemática e Música: De Pitágoras aos nossos dias, Marcos do Carmo Pereira,UFRJ
15. Propriedades das ondas numa corda, Giorgia Taiacol Aleixo, UNICAMP
16. Matemática na Idade Média: entre o místico e o científico, Arlete de Jesus Brito,UNESP
17. Música e História da Matemática, Carla Bromberg, História da Ciência e Ensino
18. A música no tempo (musicanotempo.comunidades.net)
19. História da Música Ocidental (www.movimento.com)
20. História da Música: Pré-História e Oriente Médio, Maria Bernardete Miranda, Direito Brasil Publicações

21. Matemática e Música:"um casamento perfeito", Josimara L.F. dos Santos e Mauro José dos Santos, Escola Estadual 29 de Novembro
22. Música e Matemática, Miguel Ratton, Música sacra e Adoração
23. Matemática e Música Grega, Marcos Antonio de Moraes, Instituto Superior de Educação de Guarapuava
24. Matemática e Música (somatematica.com.br/mundo/musica.php)
25. Música e Matemática (pt.m.wikipedia.org)
26. Teoria Musical Fundamental (www.academiamusical.com.pt)