

# Números Complexos

## Definições

### Interpretação Geométrica

### Exercícios Resolvidos

### Exercícios propostos

Quantas vezes, ao calcularmos o valor de Delta ( $b^2 - 4ac$ ) na resolução da equação do 2º grau, nos deparamos com um valor negativo ( $\Delta < 0$ ). Nesse caso, sempre dizemos ser impossível a raiz no universo considerado (normalmente no conjunto dos reais –  $\mathbf{R}$ ). A partir daí, vários matemáticos estudaram este problema, sendo Gauss e Argand os que realmente conseguiram expor uma interpretação geométrica num outro conjunto de números, chamado de números complexos, que representamos por  $\mathbf{C}$ .

## Números Complexos

Chama-se conjunto dos números complexos, e representa-se por  $\mathbf{C}$ , o conjunto de pares ordenados, ou seja:

$$\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$$

onde  $\mathbf{x}$  pertence a  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{y}$  pertence a  $\mathbf{R}$ .

Então, por definição, se  $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = (\mathbf{x}, 0) + (\mathbf{y}, 0)(0, 1)$  onde  $\mathbf{i} = (0, 1)$ , podemos escrever que:

$$\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \mathbf{x} + \mathbf{y}\mathbf{i}$$

Exemplos:

$$(5, 3) = 5 + 3\mathbf{i}$$

$$(2, 1) = 2 + \mathbf{i}$$

$$(-1, 3) = -1 + 3\mathbf{i} \dots$$

Dessa forma, todo o número complexo  $\mathbf{z} = (\mathbf{x}, \mathbf{y})$  pode ser escrito na forma  $\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y}\mathbf{i}$ , conhecido como forma algébrica, onde temos:

$$\mathbf{x} = \mathbf{Re}(\mathbf{z}), \text{ parte real de } \mathbf{z}$$
$$\mathbf{y} = \mathbf{Im}(\mathbf{z}), \text{ parte imaginária de } \mathbf{z}$$

## Igualdade entre números complexos

Dois números complexos são iguais se, e somente se, apresentam simultaneamente iguais a parte real e a parte imaginária. Assim, se  $\mathbf{z}_1 = \mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{i}$  e  $\mathbf{z}_2 = \mathbf{c} + \mathbf{d}\mathbf{i}$ , temos que:

$$\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_2 \iff \mathbf{a} = \mathbf{c} \text{ e } \mathbf{b} = \mathbf{d}$$

### Adição de números complexos

Para somarmos dois números complexos basta somarmos, separadamente, as partes reais e imaginárias desses números. Assim, se  $z_1=a+bi$  e  $z_2=c+di$ , temos que:

$$z_1+z_2=(a+c) + (b+d)i$$

### Subtração de números complexos

Para subtrairmos dois números complexos basta subtrairmos, separadamente, as partes reais e imaginárias desses números. Assim, se  $z_1=a+bi$  e  $z_2=c+di$ , temos que:

$$z_1-z_2=(a-c) + (b-d)i$$

### Potências de $i$

Se, por definição, temos que  $i = (-1)^{1/2}$ , então:

$$i^0 = 1$$

$$i^1 = i$$

$$i^2 = -1$$

$$i^3 = i^2 \cdot i = -1 \cdot i = -i$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = -1 \cdot -1 = 1$$

$$i^5 = i^4 \cdot i = 1 \cdot i = i$$

$$i^6 = i^5 \cdot i = i \cdot i = i^2 = -1$$

$$i^7 = i^6 \cdot i = (-1) \cdot i = -i \dots\dots$$

Observamos que no desenvolvimento de  $i^n$  ( $n$  pertencente a  $N$ , com  $n$  variando, os valores repetem-se de 4 em 4 unidades. Desta forma, para calcularmos  $i^n$  basta calcularmos  $i^r$  onde  $r$  é o resto da divisão de  $n$  por 4.

Exemplo:

$$i^{63} \Rightarrow 63 / 4 \text{ dá resto } 3, \text{ logo } i^{63} = i^3 = -i$$

### Multiplicação de números complexos

Para multiplicarmos dois números complexos basta efetuarmos a multiplicação dos dois binômios, observando os valores das potências de  $i$ . Assim, se  $z_1=a+bi$  e  $z_2=c+di$ , temos que:

$$z_1 \cdot z_2 = a \cdot c + adi + bci + bdi^2$$

$$z_1 \cdot z_2 = a \cdot c + bdi^2 = adi + bci$$

$$z_1 \cdot z_2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

$$\text{Observar que : } i^2 = -1$$

### Conjugado de um número complexo

Dado  $z=a+bi$ , define-se como conjugado de  $z$  (representa-se por  $z^-$ )  $\Rightarrow z^- = a-bi$

Exemplo:

$$z=3 - 5i \Rightarrow z^- = 3 + 5i$$

$$z = 7i \Rightarrow z^- = -7i$$

$$z = 3 \Rightarrow z^- = 3$$

### Divisão de números complexos

Para dividirmos dois números complexos basta multiplicarmos o numerador e o denominador pelo conjugado do denominador. Assim, se  $z_1= a + bi$  e  $z_2= c + di$ , temos que:

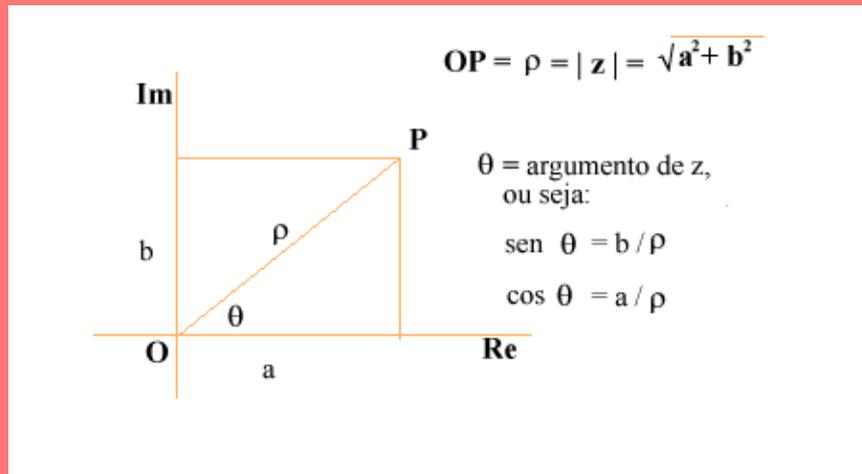
$$z_1 / z_2 = [z_1 \cdot z_2^-] / [z_2 z_2^-] = [ (a+bi)(c-di) ] / [ (c+di)(c-di) ]$$

### Módulo de um número complexo

Dado  $z = a+bi$ , chama-se módulo de  $z \Rightarrow |z| = (a^2+b^2)^{1/2}$ , conhecido como  $r$

## Interpretação geométrica

Como dissemos, no início, a interpretação geométrica dos números complexos é que deu o impulso para o seu estudo. Assim, representamos o complexo  $z = a+bi$  da seguinte maneira



## Forma polar dos números complexos

Da interpretação geométrica, temos que:

$$z_1 = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \text{sen } \theta_1)$$

$$z_2 = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \text{sen } \theta_2)$$

que é conhecida como forma polar ou trigonométrica de um número complexo.

## Operações na forma polar

Sejam  $z_1 = \rho_1 (\cos \theta_1 + i \text{sen } \theta_1)$  e  $z_2 = \rho_2 (\cos \theta_2 + i \text{sen } \theta_2)$ . Então, temos que:

### a) Multiplicação

$$z_1 \cdot z_2 = \rho_1 \rho_2 [\cos(\theta_1 + \theta_2) + i \text{sen}(\theta_1 + \theta_2)]$$

### Divisão

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\rho_1}{\rho_2} [\cos(\theta_1 - \theta_2) + i \operatorname{sen}(\theta_1 - \theta_2)]$$

### Potenciação

$$z^n = \rho^n [\cos(n\theta) + i \operatorname{sen}(n\theta)]$$

### Radiciação

$$z_k = \sqrt[n]{\rho} \{ \cos[(\theta + 2k\pi) / n] + i \operatorname{sen}[(\theta + 2k\pi) / n] \}$$

para  $n = 0, 1, 2, 3, \dots, n-1$

### Exercícios Resolvidos

1 – Sejam os complexos  $z_1 = (2x+1) + yi$  e  $z_2 = -y + 2i$

Determine  $x$  e  $y$  de modo que  $z_1 + z_2 = 0$

Temos que:

$$z_1 + z_2 = (2x + 1 - y) + (y + 2)i = 0$$

logo, é preciso que:

$$2x + 1 - y = 0 \text{ e } y + 2 = 0$$

Resolvendo, temos que  $y = -2$  e  $x = -3/2$

2 – Determine  $x$ , de modo que  $z = (x+2i)(1+i)$  seja imaginário puro

Efetuada a multiplicação, temos que:

$$z = x + (x+2)i + 2i^2$$

$$z = (x-2) + (x+2)i$$

Para  $z$  ser imaginário puro é necessário que  $(x-2)=0$ , logo  $x=2$

3 – Qual é o conjugado de  $z = (2+i) / (7-3i)$ ?

Efetuada a divisão, temos que:

$$z = (2+i) / (7-3i) \cdot (7+3i) / (7+3i) = (11 + 3i) / 58$$

O conjugado de  $Z$  seria, então  $z^- = 11/58 - 13i/58$

4 – Os módulos de  $z_1 = x + 20^{1/2}i$  e  $z_2 = (x-2) + 6i$  são iguais, qual o valor de  $x$ ?

$$\text{Então, } |z_1| = (x^2 + 20)^{1/2} = |z_2| = [(x-2)^2 + 36]^{1/2}$$

Em decorrência,

$$x^2 + 20 = x^2 - 4x + 4 + 36$$

$$20 = -4x + 40$$

$$4x = 20, \text{ logo } x=5$$

5 – Escreva na forma trigonométrica o complexo  $z = (1+i) / i$

Efetuando-se a divisão, temos:

$$z = [(1+i) \cdot -i] / -i^2 = (-i -i^2) = 1 - i$$

Para a forma trigonométrica, temos que:

$$r = (1 + 1)^{1/2} = 2^{1/2}$$

$$\text{sen } t = -1/2^{1/2} = -2^{1/2} / 2$$

$$\text{cos } t = 1 / 2^{1/2} = 2^{1/2} / 2$$

Pelos valores do seno e cosseno, verificamos que  $t = 315^\circ$

Lembrando que a forma trigonométrica é dada por:

$$z = r(\text{cos } t + i \text{sen } t), \text{ temos que:}$$

$$z = 2^{1/2} ( \text{cos } 315^\circ + i \text{sen } 315^\circ )$$

### Exercícios propostos

1 – Calcule o valor de  $(1 + i)^8$

Resposta: **16**

2 – Calcule as raízes quartas de  $-8 + 8 \cdot 3^{1/2}i$

Resposta:  $3^{1/2} + i, -3^{1/2} - i, 1 - 3^{1/2}i, -1 + 3^{1/2}i$

3 – Qual o valor de  $m$  para que o produto  $(2+mi)(3+i)$  seja um imaginário puro ?

Resposta: **8**

4 – Sendo  $z_1 = 5(\text{cos } 60^\circ + i \text{sen } 60^\circ)$  e  $z_2 = 3(\text{cos } 30^\circ + i \text{sen } 30^\circ)$ , qual é o valor de  $z_1 \cdot z_2$  ?

Resposta: **8i**

5 – Qual o valor do determinante da matriz  $A = \begin{pmatrix} z & z \\ 2z & z \end{pmatrix}$  onde  $z = \text{cos } 135^\circ + i \text{sen } 135^\circ$ ?

Resposta: **i**

Cortesia do Prof. Mauro  
Qualquer dúvida ligue para (21) 25685773