Cortesia do Prof. Mauro
Qualquer dúvida ligue para (21) 25685773

Estudo das Cônicas

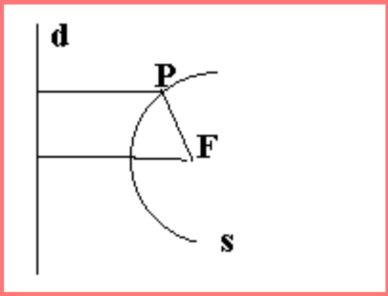
Elementos da Parábola
Elementos da Elipse
Elementos da Hipérbole
Exercícios propostos

Diferentes seções que podemos fazer em um cone produzem o que chamamos de curvas cônicas: a parábola, a elipse e a hipérbole.

Definição

Consideremos um plano **A**: Um ponto **P(x,y)**, uma reta **d** e uma curva **s**, contida em **A**.

Dizemos que a curva **s** é uma cônica se para todo ponto **P** de **s** a razão entre as distâncias de **P** até **F** e de **P** até **d** for constante:



Chama−se:

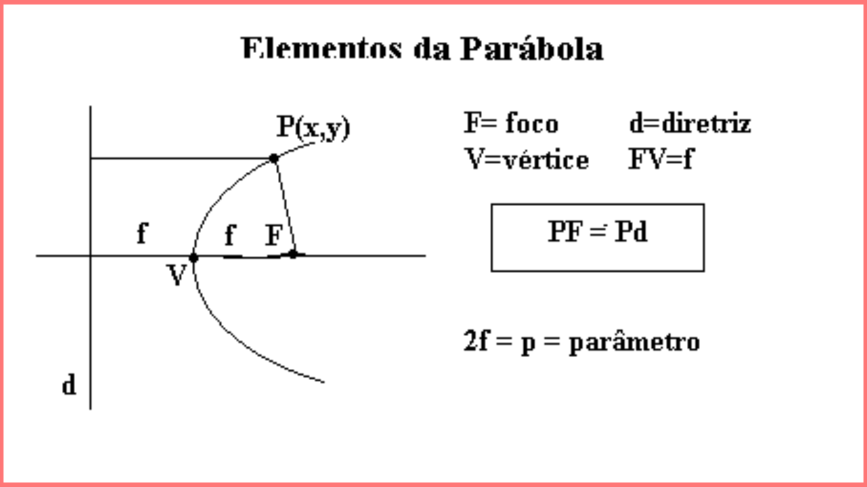
F à foco

D à diretriz

E = excentricidade= d(PF) /d(Pd)

Se **e** < **1**, temos uma elipse; se **e** = **1**, temos uma parábola; se **e** >**1**, temos uma hipérbole

Parábola



Def.:

É o conjunto dos pontos de um plano, equidistantes de um ponto fixo F e de uma reta fixa d do plano.

Equações da Parábola:

- Com o eixo de simetria coincidente com o eixo dos **x** e o vértice na origem.

Seja P(x,y) e F(k,0) então $\mathbf{y^2 = 4kx}$

- Com o eixo de simetria coincidente com o eixo dos **y** e o vértice na origem

Seja P(x,y) e F(0,k) então $\mathbf{x^2 = 4kx}$

- Com o eixo de simetria horizontal e vértice num ponto (m,n).

Seja P(x,y) e F(m+k,n), então $\mathbf{(y - n)^2 = 4k(x - m)}$

- Com eixo de simetria vertical e vértice num ponto (m,n)

Seja P(x, y) e F(m, n+k) então $\mathbf{(x - m)^2 = 4k\ (y - n)}$

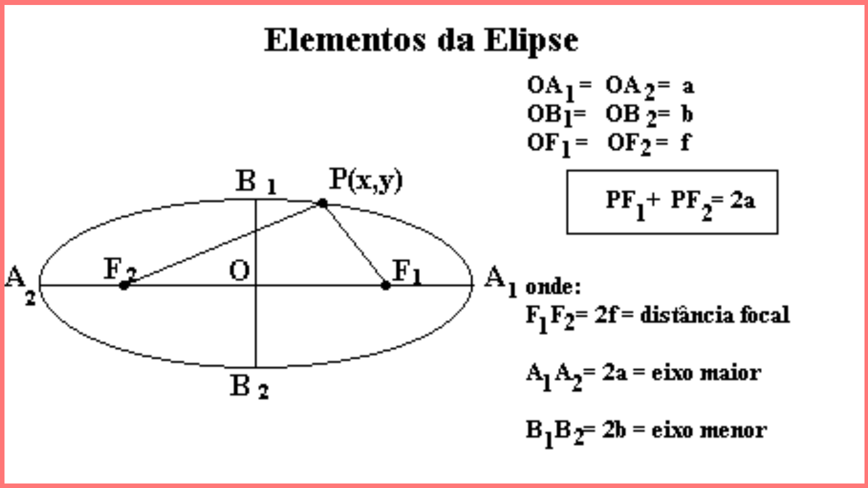
Exemplo:

Determinar a equação da parábola cujo foco é o ponto f(0,−2) e cuja diretriz é a reta y=2.

Verificamos ser o caso b (eixo de simetria coincidente com o eixo dos y), então a equação é $x^2 = 4ky$.

Substituindo o valor de k, temos: $x^2 = -8y$ ou, $x^2 + 8y = 0$.

Elipse:



É o conjunto dos pontos de um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos é constante.

Equações da elipse

a. Centrada na origem e com o eixo maior na horizontal

Seja P(x,y) e 2a e 2b os eixos maiores e menores respectivamente,

Então

$x^2 / a^2 + y^2/b^2 = 1$

b. Centrada na origem e com o eixo maior na vertical

Seja P(x,y) e 2a e 2b os eixos maiores e menores respectivamente,

Então,

$x^2 / b^2 + y^2 / a^2 = 1$

Exemplo:

Obter a equação de uma elipse de vértices $V_1(0, -5)$ e $V_2(0, 5)$ e de focos $F_1(0, -2)$ e $F_2(0,2)$.

Trata−se do caso b (foco no eixo dos **y**)

Então,

$x^2 / b^2 + y^2 / a^2 = 1$

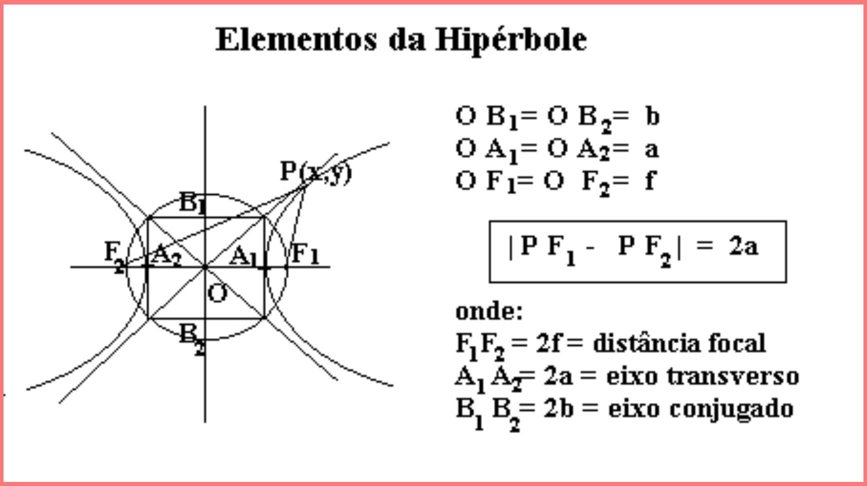
Sabemos que c = 2 e a = 5, podemos calcular b, ou seja:

$a^2 = b^2 + c^2$, à $25 = b^2 + 4$ à $b^2 = 21$

Substituindo os valores na equação temos:

$x^2 / 21 + y^2 / 25 = 1$ à $25x^2 + 21y^2 = 525$

Hipérbole



Sejam F_1 e F_2 dois pontos fixos do plano. Chamamos de hipérbole ao conjunto dos pontos P do plano em que a diferença entre as distâncias de P a F_1 e de P a F_2 é constante.

Equações da hipérbole

- Com foco no eixo das abcissas **(x)**

Seja P(x,y) e a e b os semi−eixos reais (transverso) e imaginário (conjugado).

Então,

$x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$

- Com foco no eixo das ordenadas **(y)**

Seja P(x,y) e a e b os semi−eixos transverso e conjugado.

Então,

$x^2 / b^2 - y^2 / a^2 = 1$

Exemplo

Obter a equação da hipérbole cujos focos são $F_1(-6,0)$ e $F_2(6,0)$ e cujos vértices são $V_1(-3,0)$ e $V_2(3,0)$.

Trata−se do caso a (foco no eixo dos x)

Então,

$x^2 / a^2 - y^2 / b^2 = 1$

Sabemos que

$a = 3$ e $c = 6$, como $c^2 = a^2 + b^2$ à $36 = 9 + b^2$ à $b^2 = 27$

Substituindo na fórmula, temos que:

$x^2 / 9 - y^2 / 27 = 1$ ou ainda à $3x^2 - y^2 = 27$

Exercícios

1. Obter a equação da diretriz de uma parábola cuja equação é $x^2 + 4x + 4y + 12 = 0$.

Resp = $\mathbf{y = -1}$

2. Determine a equação da parábola cujo foco é o ponto F(0,5) e cuja diretriz é a reta $y = 5$.

Resp = $\mathbf{x^2 + 20y = 0}$

3. Determine a equação do conjunto de pontos equidistantes da reta $y = -3$ e do ponto fixo F(0,3).

Resp = $\mathbf{x^2 - 12y = 0}$

4. Escreva a equação da elipse que tem focos $F_1(3,0)$ e $F_2(-3,0)$ e cujos vértices são $A_1(5,0)$ e $A_2(-5,0)$.

Resp = $\mathbf{x^2 / 25 + y^2 / 16 = 1}$

5. Qual é a equação da elipse cujos focos são $F_1(0,-1)$ e $F_2(0,1)$ e cujos vértices são $A_1(0,-4)$ e $A_2(0,4)$.

Resp = $\mathbf{x^2 / 15 + y^2 / 16 = 1}$

6. Determine a equação de um hipérbole cujos focos são $F_1(0,-3)$ e $F_2(0,3)$ e cujos vértices são $A_1(0,-1)$ e $A_2(0,1)$.

Resp = $\mathbf{x^2 / 8 + y^2 / 1 = 1}$

Cortesia do Prof. Mauro
Qualquer dúvida ligue para (21) 25685773