

Cortesia do Prof. Mauro
Qualquer dúvida ligue para (21) 25685773

Binômio de Newton

Definições

Termo Geral

Exercícios Resolvidos

Exercícios propostos

No estudo da Análise Combinatória, aprendemos o conceito de Fatorial de um número. Assim, por exemplo, sabemos que o fatorial de 6 é o produto $6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$, ou seja 720. De forma genérica, portanto, $n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots$ até 1.

Em decorrência, temos que:

$$n! = n \cdot (n-1)! \text{ e assim, sucessivamente.}$$

Com esta definição em mente vamos aprender um conceito importante, o de **Coefficiente Binomial**

Dados dois números naturais n e p , sendo $n \geq p$, chamamos de coeficiente binomial de n sobre p , e indicamos por $\binom{n}{p}$, da seguinte maneira:

$$\binom{n}{p} = n! / [p! \cdot (n-p)!]$$

Observar conforme estudo da Análise Combinatória, que estamos tratando da mesma fórmula para o cálculo das combinações. Assim, temos que:

$$\binom{n}{p} = C_{n,p}$$

Assim, por exemplo, temos:

$$\binom{10}{7} = C_{10,7} = 10! / [7! 3!] = 120$$

$$\binom{7}{3} = C_{7,3} = 7! / [3! 4!] = 35$$

Casos particulares:

$$\binom{n}{0} = n! / [0! n!] = n! / [1 n!] = 1$$

$$\binom{n}{1} = n! / [1!(n-1)!] = n(n-1)! / (n-1)! = n$$

$$\binom{n}{n} = n! / [n! 0!] = 1$$

Então, por exemplo, temos que:

$$\binom{3}{0} = 1$$
$$\binom{5}{1} = 5$$
$$\binom{6}{6} = 1$$

É importante termos em mente esta definição de coeficientes binomiais para estudarmos o desenvolvimento do Binômio de Newton. Antes, vamos verificar alguns pontos importantes para podermos aplicar no estudo do Binômio de Newton. Assim, temos;

a) binômios complementares

Dizemos que dois coeficientes binomiais de mesmo numerador são complementares quando a soma de seus denominadores é igual ao numerador, ou seja:

$$\binom{n}{p} \text{ e } \binom{n}{q} \text{ são complementares se } p+q=n$$

Exemplos:

$$\binom{7}{3} \text{ e } \binom{7}{4};$$
$$\binom{8}{5} \text{ e } \binom{8}{3} \dots$$

Propriedade; Dois coeficientes complementares são iguais.

Então:

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{q}$$

Se $p=q$ ou $n=p+q$ onde $n \geq p$ e $n \geq q$

b) triângulo de Pascal

Os coeficientes binomiais podem ser dispostos em uma tabela chamada "triângulo de Pascal", da seguinte maneira:

$$\begin{array}{c} \binom{0}{0} \\ \binom{1}{0} \binom{1}{1} \\ \binom{2}{0} \binom{2}{1} \binom{2}{2} \\ \dots\dots\dots \\ \binom{n}{0} \binom{n}{1} \binom{n}{2} \dots\dots\dots \binom{n}{n} \end{array}$$

Nesta tabela, verifica-se que:

- 1) os coeficientes binomiais equidistantes dos extremos são iguais, por serem complementares
- 2) cada elemento de uma linha (a partir da segunda) é igual à soma do elemento imediatamente acima com o seu anterior. Esta propriedade é conhecida como **Relação de Stifel**, que pode ser enunciada assim:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}, \text{ onde } n \geq p$$

3) a soma dos elementos da linha de numerador **n** é igual a **2ⁿ**, ou seja

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \dots + \binom{n}{n} = 2^n$$

Para fecharmos o estudo preparatório ao Binômio de Newton devemos rever a definição de somatório. O símbolo Σ (somatório) representa a soma de certo número de parcelas, que são indicadas no próprio símbolo. Assim, temos:

$$\Sigma_{i=1}^3 i^3 = 1^3 + 2^3 + 3^3 = 1 + 8 + 27 = 36$$

Com estes conceitos e definições, podemos agora estudar o Binômio de Newton. Sejam dois números reais a e b e um número natural n . Sabemos que:

$$\text{para } n=0 \implies (a+b)^0 = 1$$

$$\text{para } n=1 \implies (a+b)^1 = 1a + 1b$$

$$\text{para } n=2 \implies (a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$$

$$\text{para } n=3 \implies (a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$$

À medida que n vai aumentando, os produtos deixam de ser notáveis e passam a ficar mais complexos. Observando o crescimento de n , notamos que:

- 1) os expoentes do 1º termo (a) decresce de n até zero.
- 2) os expoentes do 2º termo (b) cresce de zero até n
- 3) os coeficientes correspondem ordenadamente às linhas do triângulo de Pascal

Desta forma podemos enunciar que:

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

Utilizando a representação do somatório podemos enunciar o teorema binomial como:

$$(a+b)^n = \Sigma_{k=0}^n \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Exemplo:

$$(a-1)^5 = \binom{5}{0}a^5 - \binom{5}{1}a^4 + \binom{5}{2}a^3 - \binom{5}{3}a^2 + \binom{5}{4}a - \binom{5}{5} = a^5 - 5a^4 + 10a^3 - 10a^2 + 5a - 1$$

Termo Geral do Binômio

Muitas vezes temos que saber um termo específico de desenvolvimento de $(a+b)^n$ e, dependendo do valor de n , é extremamente trabalhoso desenvolvermos todo o binômio para conhecer o termo desejado. Para isto, precisamos encontrar uma expressão que represente qualquer termo do desenvolvimento de $(a+b)^n$ e, a partir desta expressão, determinar o termo procurado.

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \dots + \binom{n}{n-1}a^1 b^{n-1} + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

Chamamos de termo geral a expressão

$$\binom{n}{k} a^{n-k} b^k, \text{ onde } k=0, 1, 2, 3, \dots, n$$

Assim se quisermos calcular o **p-ésimo termo**, basta fazermos $k=p-1$

Exemplo:

Calcular o 6º termo de $(x-2y)^8$

O termo geral é:

$$\binom{8}{k}(x)^{8-k}(-2y)^k = \binom{8}{k}(-2)^k x^{8-k} y^k$$

Se queremos o 6º termo, então $k=5$, logo o termo procurado é:

$$\binom{8}{5}(-2)^5 x^3 y^5 = 1792 x^3 y^5$$

Outro exemplo

Qual o coeficiente de x^8 no desenvolvimento de $(x^2/3 + 2)^8$

Pelo termo geral, temos que:

$$\binom{8}{k}(x^2/3)^{8-k} 2^k$$

$$\binom{8}{k}(1/3)^{8-k} (x^2)^{8-k} 2^k$$

Se queremos o coeficiente de x^8 é necessário que

$$x^{16-2k} = x^8 \text{ logo } k=4$$

Então, o coeficiente procurado é :

$$\binom{8}{4}(1/3)^4 2^4 = 1120/81$$

Exercícios resolvidos:

1 – Resolva a equação $(x-3)! = 1$

Podemos dizer que:

$$(x-3)! = 0!$$

logo $x - 3 = 0$, então **$x=3$**

Por outro lado, podemos ter também:

$$(x-3)! = 1!$$

logo $x-3=1$, então **$x=4$**

Logo, as soluções são **$x=3$ e/ou $x=4$**

2 – Determine **m** que verifique $\binom{12}{2m-1} = \binom{12}{m+4}$

Pela igualdade, temos:

$$2m-1 = m+4, \text{ logo } \mathbf{m=5}$$

Também, podemos supor que seja binoômios complementares, então

$$2m - 1 + m + 4 = 12, \text{ logo } \mathbf{m=3}$$

3 – Aplicando a Relação de Stifel, calcule: $\binom{10}{5} + \binom{10}{6}$

Pela relação de Stifel temos que:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

Então, temos que:

$$\binom{10}{6} + \binom{10}{5} = \binom{11}{6}, \text{ ou seja:}$$

$$\binom{11}{6} = 11! / [6! 5!] = \mathbf{462}$$

4 – Dado $\binom{p}{q+1} = 15$ e $\binom{p}{q+2} = 6$, calcule $\binom{p+1}{q+2}$

Pela Relação de Stifel, temos que:

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}$$

Aplicando a relação aos dados, temos:

$$\binom{p+1}{q+2} = \binom{p}{q+2} + \binom{p}{q+1}$$

ou seja:

$$\binom{p+1}{q+2} = 6 + 15 = \mathbf{21}$$

5 – Calcule $\sum_{n=1}^4 \binom{4}{n} \cdot (3/4)^{4-n} \cdot (1/4)^n$

Para $n=1$, temos:

$$\binom{4}{1} (3/4)^3 (1/4) = 27 / 4^3 \quad (1)$$

Para $n=2$, temos:

$$\binom{4}{2} (3/4)^2 (1/4)^2 = 54 / 4^4 \quad (2)$$

Para $n=3$, temos:

$$\binom{4}{3} (3/4)^1 (1/4)^3 = 3 / 4^3 \quad (3)$$

Para $n=4$, temos:

$$\binom{4}{4} (3/4)^0 (1/4)^4 = 1 / 4^4 \quad (4)$$

Somando-se, (1),(2),(3) e (4), temos que:

$$27/4^3 + 54/4^4 + 3/4^3 + 1/4^4 = \mathbf{175 / 256}$$

Exercícios propostos:

1 – Qual a solução de $[(n+1)!] / [(n-1)!] = 210$?

Resposta: **n=14**

2 – Sendo $\binom{18}{k} = \binom{18}{k+4}$ quanto vale **k**!?

Resposta: **5040**

3 – No desenvolvimento de $(x - 1/x)^{12}$ qual é o termo médio ?

Resposta; $\binom{12}{6}$

4 – No desenvolvimento de $(x + 1)^{50}$, qual é o coeficiente de termo de 2º grau?

Resposta: **1225**

5 – No desenvolvimento de $(2x^2 + 1/x)^8$, segundo potências decrescentes de **x**, qual é o coeficiente do 5º termo ?

Resposta: **1120**

Cortesia do Prof. Mauro
Qualquer dúvida ligue para (21) 25685773