

# Estudo da Circunferência

## Definições

### Equação reduzida da Circunferência

### Reconhecimento da equação da circunferência

### Posições relativas entre Ponto e Circunferência

### Posições relativas entre Reta e Circunferência

### Posições relativas entre duas Circunferências

## Exercícios Propostos

Muitos alunos se confundem em reconhecer a função cujo gráfico representa uma elipse, que é uma cônica (derivada de uma seção no cone), com a representação de uma circunferência.

Exemplo:

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 9 \text{ (representa uma circunferência)}$$

$$x^2/144 + y^2/16 = 1 \text{ (representa uma elipse)}$$

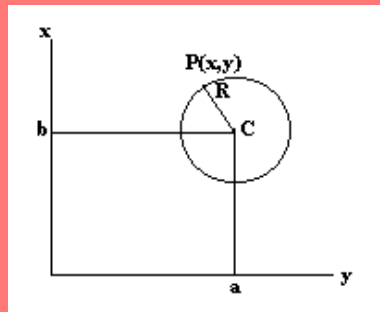
Devido a isto é interessante complementar o estudo das Cônicas com este pequeno resumo do Estudo da Circunferência.

## Definição

O conjunto dos pontos do plano equidistantes de um ponto fixo C, denominado de centro, é chamado de circunferência. A medida da distância de qualquer ponto da circunferência ao centro C é constante, e denomina-se raio (R).

## Equação reduzida da Circunferência

Seja o gráfico abaixo:



A equação reduzida da circunferência expressa a distância entre os pontos C e P, através de suas coordenadas e pode ser escrita como:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

já que a distância entre dois pontos A(x<sub>A</sub> , y<sub>A</sub>) e B(x<sub>B</sub>,y<sub>B</sub>) é dada por:

$$d^2 = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2$$

Assim, um ponto P(x,y) qualquer só pertencerá a circunferência se e somente a sua distância ao centro C for igual ao raio R.

Exemplo:

Seja uma circunferência cuja equação é:

$$(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 100$$

Verificar se a circunferência passa pela origem ,quais as coordenadas do centro e quanto vale o raio  
Pela expressão temos que:

R = 10 e C(2,3)

Fazendo x=0 e y=0, temos que:

$$(-2)^2 + (-3)^2 = 13$$

Como 13 é diferente de 100, logo a circunferência não passa pela origem

## Reconhecimento da equação da circunferência

A equação geral da circunferência apresenta a seguinte forma:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$$

Vimos que a forma reduzida é dada por:

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2 \text{ (I)}$$

Agrupando os termos em x e y e isolando-se o C, temos que

$$(x^2 + Ax) + (y^2 + By) = -C$$

Adicionando-se  $A^2/4$  e  $B^2/4$  em ambos os membros da equação para obtermos os quadrados perfeitos, temos que:

$$(x^2 + Ax + A^2/4) + (y^2 + By + B^2/4) = -C + A^2/4 + B^2/4$$

Ou ainda:

$$(x + A/2)^2 + (y + B/2)^2 = (A^2 + B^2 - 4C) / 4 \text{ (II)}$$

Se compararmos a equação reduzida (I) com esta nova equação (II), temos que:

$$R^2 = (A^2 + B^2 - 4C) / 4$$

$$a = -A/2$$

$$b = -B/2$$

Então podemos sempre afirmar que:

a) Se  $(A^2 + B^2 - 4C) / 4 > 0$ , então teremos uma circunferência de centro  $C(-A/2, -B/2)$  e o raio  $R$

b) Se  $(A^2 + B^2 - 4C) / 4 = 0$ , teremos um ponto único como representação, já que  $R = 0$

c) Se  $(A^2 + B^2 - 4C) / 4 < 0$ , não existem valores possíveis, já que  $R < 0$ .

Exemplo:

Verificar se  $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 49 = 0$  representa o gráfico de uma circunferência.

Pela equação geral sabemos que  $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$

Da equação dada, temos que:

$$A = -6$$

$$B = -8$$

$$C = 49$$

Então

$$R = [(-6)^2 + (-8)^2 - 4 \cdot 49] / 4 = -24$$

Como  $R$  é negativo a equação fornecida não representa uma circunferência.

## Posições relativas entre Ponto e circunferência

Seja um ponto  $P(x,y)$  e  $C(a,b)$  o centro de uma circunferência de raio  $R$ . Então temos 3 possibilidades:

a)  $d(C,P) = R$

Se a distância de  $P$  ao centro é igual ao raio  $R$ , então  $P$  pertence à circunferência, ou seja:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$$

b)  $d(C,P) < R$

Se a distância de  $P$  ao centro  $C$  é menor que o raio  $R$ , então  $P$  é interno à circunferência, ou seja:

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 < R^2$$

c)  $d(C,P) > R$

Se a distância de  $P$  ao centro  $C$  é maior que o raio  $R$ , então  $P$  é externo à circunferência, ou seja

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 > R^2$$

Exemplo:

Qual a posição de  $P(-1,1)$  em relação à circunferência  $x^2 + y^2 + 5x + 7y - 14 = 0$ ?

Então

$$(-1)^2 + 1^2 + 5(-1) + 7(1) - 14 = -10$$

Então  $P(-1,1)$  é interno à circunferência

### Posição relativa entre reta e circunferência

Seja uma reta  $r$  em relação a uma circunferência  $c$ . Podemos ter 3 possibilidades:

a) interseção de  $c$  e  $r$  em dois pontos

Neste caso a distância do centro à reta é menor que o raio, ou seja  $d(c,r) < R$  (secantes)

b) interseção de  $c$  e  $r$  em um único ponto

Neste caso, a distância do centro à reta é a medida do raio, ou seja  $d(c,r) = R$  (tangentes)

c) interseção de  $c$  e  $r$  vazia

Neste caso a distância do centro à reta é maior que o raio, ou seja  $d(c,r) > R$  (externas)

Exemplo:

Determinar a posição da reta  $r$  dada por  $y = x + 5$  em relação à circunferência  $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$ .

Calculando as coordenadas do raio temos que:

$$C(-0/2, 6/2) = C(0,3)$$

$$\text{Calculando o raio } R^2 = (0^2 + (-6)^2 - 20) / 4 = 4 \text{ donde } R = 2$$

Calculando a distância do centro  $C$  à reta  $x - y + 5 = 0$ , temos que

$$d(C,r) = [ |1.0 + (-1).3 + 5| ] / (1 + 1)^{1/2} = 2^{1/2}$$

Comparando a distância  $2^{1/2}$  com o raio 2, vemos que  $2^{1/2} < 2$ , logo  $d(C,r) < R$ , ou seja a reta corta a circunferência em dois pontos (são secantes)

Observação:

a fórmula utilizada em  $d(C,r) = ( |ax + by + c| ) / (a^2 + b^2)^{1/2}$  é a fórmula da distância de um ponto a uma reta.

### Posição relativa entre duas circunferências

Dadas duas circunferências  $C_1$  e  $C_2$ , temos 3 possibilidades

a) as circunferências se cortam em dois pontos (secantes)

Neste caso, a distância entre os centros das duas circunferências é menor que a soma de seus raios, ou seja  $d(C_1, C_2) < R_1 + R_2$

b) as circunferências se tocam em um único ponto (tangentes)

Neste caso podemos ter 2 possibilidades, ou elas se tangenciam externamente ou internamente.

b.1) externamente

Neste caso a distância entre os centros se iguala à soma dos seus raios, ou seja  $d(C_1, C_2) = R_1 + R_2$

b.2) internamente

Neste caso a distância entre os centros é igual ao módulo da diferença dos respectivos raios, ou seja  $d(C_1, C_2) = |R_1 - R_2|$

c) As circunferências não se tocam (são externas)

Neste caso, podemos ter 2 possibilidades ou elas são internas ou externas

c.1) externas (interseção vazia)

Neste caso a distância entre os centros é maior que a soma dos raios, ou seja  $d(C_1, C_2) > R_1 + R_2$

c.2) interna (interseção igual a circunferência de menor raio)

Neste caso a distância entre os centros é menor que o módulo da diferença dos respectivos raios, ou seja  $d(C_1, C_2) < |R_2 - R_1|$

Exemplo:

Determinar a posição relativa da circunferência  $(A_1) x^2 + y^2 - 16x + 48 = 0$  em relação à circunferência  $(A_2) x^2 + y^2 - 4x = 0$

Vamos calcular  $C_1$  e  $R_1$

$$C_1(16/2, 0/2) = C_1(8, 0)$$

$$R_1^2 = (256 + 0 - 192) / 4 = 16 \text{ donde } R_1 = 4$$

Vamos calcular  $C_2$  e  $R_2$

$$C_2(4/2, 0/2) = C_2(2, 0)$$

$$R_2^2 = (16 + 0 - 0) / 4 = 4 \text{ donde } R_2 = 2$$

Assim, temos que  $R_1 + R_2 = 6$

Calculando a distância dos centros temos que:

$$d(C_1, C_2) = [(2-8)^2 + (0-0)^2]^{1/2} = 36^{1/2} = 6$$

Comparando a distância com a soma dos raios vemos que são iguais, logo as duas circunferências se tangenciam externamente.

## Exercícios propostos

1) Verifique se a equação  $2x^2 + 2y^2 + 4x - 12y + 22 = 0$  representa uma circunferência qualquer.

Resposta: Não se trata de uma circunferência

2) Escreva as equações das retas verticais tangentes à circunferência  $x^2 + y^2 + 6x - 2y + 6 = 0$

Resposta:  $x = -5$  e  $x = -1$

3) Obter as equações das tangentes à circunferência  $x^2 + y^2 = 9$  que sejam paralelas à reta  $2x + y - 1 = 0$

Resposta:  $2x + y + 3.5^{1/2} = 0$  e  $2x + y - 3.5^{1/2} = 0$

4) Determinar as equações das tangentes à circunferência  $x^2 + y^2 - 6x - 8y + 24 = 0$  que sejam perpendiculares à reta  $3x + y + 1 = 0$

Resposta:  $x - 3y + 9 + 10^{1/2} = 0$  e  $x - 3y + 9 - 10^{1/2} = 0$

5) Escrever a equação reduzida da circunferência de centro  $C(2, 5)$  e raio  $= 7$

Resposta:  $(x-2)^2 + (y-5)^2 = 49$

6) Obter a equação da circunferência com centro no ponto  $C(7, 10)$  e que passe pelo ponto  $P(10, 14)$

Resposta:  $(x-7)^2 + (y-10)^2 = 25$

7) Determinar  $m$  real para que a equação  $x^2 + y^2 - mx - 10y + 25 = 0$  tenha como gráfico uma circunferência

Resposta:  $m > 0$

8) Sabendo-se que a reta de equação  $y = x + 5$  e a circunferência de equação  $x^2 + y^2 - 6y + 5 = 0$  são secantes, calcular as coordenadas dos pontos de interseção.

Resposta:  $A(0, 5)$  e  $B(-2, 3)$

9) Determinar a posição relativa da circunferência  $x^2 + y^2 - 4x - 6y - 3 = 0$  em relação à circunferência  $x^2 + y^2 + 6x + 2y + 1 = 0$

Resposta: São secantes

