Cortesia do Prof. Mauro
Qualquer dúvida ligue para (21) 25685773

# Probabilidade (resumo)

## Definições
## Probabilidade
## Exercícios resolvidos
## Exercícios propostos

Embora o cálculo de probabilidades seja uma ferramenta indispensável ao estudo da Estatística e em muitos modelos da Pesquisa Operacional, seus conceitos e aplicabilidade são ensinados cada vez mais no Ensino Médio
Normalmente é no ensino da Análise Combinatória que começa a se estabelecer os conceitos e as noções básicas para a compreensão do cálculo de probabilidades. Entretanto, quase sempre, não é dada a continuidade a este estudo, bastante importante no nosso dia−a−dia , o que provoca o esquecimento deste tipo de cálculo, por parte dos alunos
Devido a isto, segue um resumo da teoria e alguns exercícios resolvidos e a resolver, a fim de que os alunos possam tirar suas dúvidas, quando necessário.

Sejam algumas definições essenciais

1) Experiência ( experimento) aleatório

Toda a experiência repetida em condições idênticas em que aparecem resultados distintos é dita **experiência aleatória**

Exemplo
o lançamento de uma moeda, de um dado, a extração de bolas de uma urna, ...

2) Espaço amostral (ou das probabilidades)

É como se chama o conjunto de todos os resultados possíveis de um experimento

Exemplo:
O espaço amostral do lançamento de um dado é de ter 6 (seis) faces diferentes voltadas para o lançador.

3) Evento

No conjunto do espaço amostral, qualquer dos seus subconjuntos é chamado de evento.

Exemplo:
No lançamento de um dado a ocorrência de termos um número ímpar na face virada é um evento, ou seja:
**A** = {1,2,3,4,5,6} (espaço amostral)
**E** = {1,3,5} (evento)
Repare que E é subconjunto de A

**Obs:**
Evento certo : se A = E
Evento impossível : se E = Ø (vazio)
Evento elementar : n(E) = 1 (só existe um elemento)

4) Evento complementar

É o evento que ocorre, se e somente se o outro evento não ocorrer

**Obs:**
1. A interseção de 2 eventos complementares é vazia
2. A união de 2 eventos complementares é o espaço amostral

## Probabilidade

Seja o espaço amostral

$A = \{ a_1, a_2, a_3, ..., a_k \}$

Associemos a cada ponto amostral um número real $p \{ a_i \}$ ou $p_i$ chamado de probabilidade do evento $\{ a_i \}$, ou probabilidade de ocorrência do ponto amostral $a_i$, tal que:

1) $0 \leq p_i \leq 1$
2) $p_1 + p_2 + p_3 + ... + p_k = 1$

Define−se então como probabilidade do evento E a relação entre o número de elementos do referido evento e o número de elementos do espaço amostral, ou seja:

$p(E) = n(E) / n(A)$

Exemplo: Qual a probabilidade no lançamento de um dado, da face voltada para cima ser um número menor que 4 ?
Temos que:
$E = \{1,2,3\}$ −−> $n(E) = 3$
$A = \{1,2,3,4,5,6\}$ −−> $n(A) = 6$
Logo:
$p(E) = 3 / 6 = 1/2$

## Conceitos e propriedades das probabilidades

União de 2 eventos

Neste caso, temos que observar um pouco a teoria dos conjuntos para facilitar a compreensão. Seja, portanto, a figura abaixo:

Pela teoria dos conjunto, temos que:
$n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) - n(X \cap Y)$
Pela definição de probabilidade, temos que:
$n(X \cup Y) / n(A) = [ n(X) + n(Y) - n(X \cap Y) ] / n(A)$
ou ainda
$n(X \cup Y) / n(A) = n(X)/n(A) + n(Y)/n(A) - n(X \cap Y)/n(A)$
ou seja

$p(X \cup Y) = p(X) + p(Y) - p(X \cap Y)$

Exemplo:

Uma urna contem 30 bolas numeradas de 1 a 30. Uma bola é extraida ao acaso. Qual a probabilidade desta ser múltiplo de 5 e 6 ?
Temos que:
X : múltiplo de 5 −−> X = {5,10,15,20,25,30}
Y : múltiplo de 6 −−> Y = {6,12,18,24,30}
Então:
$p(X) = 6/30 = 1/5$
$p(Y) = 5/30 = 1/6$
$p(X \cap Y) = 1/30$
Então:
$p(X \cup Y) = 1/5 + 1/6 - 1/30 = 10/30 = 1/3$

**Probabilidade Condicionada** Quando sabemos da ocorrência de um evento, geralmente se modifica a probabilidade do outro. Este caso chama−se de probabilidade condicionada e a representamos assim:

$p(X|Y) = p(X \cup Y) / p(Y)$ , $p(Y) \neq 0$
ou
$p(Y|X) = p(X \cup Y) / p(X)$ , $p(X) \neq 0$

Exemplo:
Uma urna contem 5 bolas gravadas com as letras M, O, O, R, R. Extraindo−se uma a uma, qual a probabilidade de obtermos a palavra MORRO ?
Temos que:
O evento F é a interseção dos eventos:
$E_1$ : bola com M
$E_2$ : bola com O
$E_3$ : bola com R
$E_4$ : bola com R
$E_5$ : bola com O
Então
$p(F) = p(E_1).p(E_2|E_1).p(E_3|E_1E_2$ .... +
$= 1/5 . 2/4 . 2/3 . 1/2 . 1 = 2/60 = 1/30$

**Obs:**

De forma geral, podemos ter a probabilidade dos eventos condicionados representada por:

$p(F) = \Sigma^{n}_{i=1} p(E_i) . p(F|E_i)$
onde $E_1$, $E_2$, $E_3$, ... é uma partição e F um evento qualquer do espaço amostral.

Teorema da probabilidade total

Da forma geral da probabilidade condicionada podemos explicitar um teorema importante, ou seja

$p(Y) = p(X_1 \cap Y) + p(X_2 \cap Y) + p(X_3 \cap Y) + ... + p(X_n \cap Y)$

Exemplo:
Uma urna I tem 2 bolas vermelhas e 3 brancas. Outra urna II tem 3 bolas vermelhas e uma branca e outra terceira urna III tem 4 bolas vermelhas e 2 brancas. Uma urna é selecionada ao acaso e dela extraída uma bola. Qual a probabilidade desta bola ser vermelha ?
Temos os eventos:
$E_1$ : sai a urna I
$E_2$ : sai a urna II
$E_3$ : sai a urna III

estes eventos determinam uma partição do espaço amostral.
Se tivermos o evento V : sai uma bola vermelha, podemos afirmar que:
$p(V) = p(E_1 \cap V) + p(E_2 \cap V) + p(E_3 \cap V)$
Pela multiplicação sucessiva das probabilidades, temos que:
$p(E_1 \cap V) = 1/3 \,.\, 2/5 = 2/15$
$p(E_2 \cap V) = 1/3 \,.\, 3/4 = 1/4$
$p(E_3 \cap V) = 1/3 \,.\, 4/6 = 2/9$
Então
$p(V) = 2/15 + 1/4 + 2/9 = 109/180$

Independência de dois eventos

Dado 2 eventos X e Y de um espaço amostral A, diremos que X independe de Y se
$p(X|Y) = p(X)$
isto é, X independe de Y se a ocorrência de X não afeta a probabilidade de Y

**Obs**
Se X independe de Y então Y independe de X
ou seja
Se $p(X|Y) = p(X)$ então $p(Y|X) = p(Y)$
Neste caso, então
$p(X \cap Y) = p(X) \,.\, p(Y)$

Exemplo:
Dois praticantes de tiro ao alvo, A e B, apresentam a seguinte probabilidade de acertar o alvo:
$p(A) = 1/3$ e $p(B) = 2/3$
Como A e B são independentes, qual a probabilidade de A e B acertarem o alvo ?

Como $p(A \cap B) = p(A) \,.\, p(B)$
Então
$p(A \cap B) = 1/3 \,.\, 2/3 = 2/9$

**Obs**
Generalizando a propriedade, temos que:
$p(E_1 \cap E_2 \ldots \cap E_n) = p(E_1) \,.\, p(E_2) \,.\, \ldots \,.p(E_n)$

Lei Binomial da Probabilidade (Bernoulli)

Seja uma sequência de experimentos independentes, isto é, a probabilidade de um resultado independe do outro. Se em cada experimento puder ocorrer dois resultados, um chamado de "sucesso" e o outro de "fracasso" caracterizamos os experimentos de Bernoulli

Para este tipo de experimento, onde:
p = sucesso e q = fracasso
Se tivermos os eventos
$E_1$ : ocorre sucesso no experimento $X_i$, ou seja $p(X_i) = p$
$E_2$ : ocorre fracasso no experimento $X_i^c$, ou seja $p(X_i^c) = q$
podemos, neste caso, empregar a lei binomial para o cálculo da probabilidade, ou seja

$p_k = \mathbf{C}_{n,k} \,.\, p^k \,.\, q^{n-k}$

Exemplo:
Numa cidade 10% das pessoas possuem carro da marca X. Se 30 pessoas são selecionadas ao acaso, com reposição, qual a probabilidade de exatamente 5 pessoas possuirem carro da marca X ?

Seja: sucesso : a pessoa tem carro da marca X
fracasso : a pessoa Não tem carro da marca X
Então
p = 0,1 ; q = 0,9 ; n = 30
Aplicando a lei binomial, temos
$p_k = C_{30,5} \,.\, 0{,}1^5 \,.\, 0{,}9^{25} \cong = 0{,}102$

Exercícios Resolvidos

1.Dois dados são lançados simultaneamente. Qual é a probabilidade de se obter a soma dos pontos igual a 8 ou dois números iguais ?

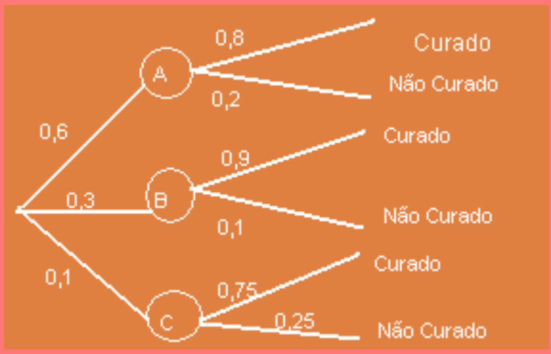
O espaço amostral seria:
A = {(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6).....(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}
os eventos seriam:
$E_1$ : soma 8 ; $n(E_1) = 5$ −−> $p(E_1) = 5/36$
$E_2$ : números iguais ; $n(E_2) = 6$ −−> $p(E_2) = 1/6$
Então:
$p(E_1 \cup E_2) = 5/36 + 1/6 - 1/36 = 5/18$

2.Uma urna contem **x** bolas brancas e **3x** bolas pretas e 3 bolas vermelhas. Uma bola é extraída ao acaso. Determine o menor valor possível de **x** a fim de que a probabilidade de a bola ser sorteada ser preta seja maior que 70%.
Pelos dados temos que:
$3x / (4x + 3) > 0{,}7$
resolvendo temos que
$0{,}2x > 2{,}1$ ou seja $x > 10{,}5$
Como **x** deve ser inteiro logo x = 11

3. Uma urna tem 3 bolas brancas e duas pretas. Extraindo−se 2 bolas simultaneamente, calcule a probabilidade de serem uma de cada cor.
O espaço amostral é: $C_{5,2} = 10$
Como temos 2 bolas pretas e 3 brancas o total de ocorrências para uma de cada cor será:
2 x 3 = 6
A probabilidade será então 6/10 ou seja 3/5

4. Se no problema anterior as bolas fossem retiradas uma a uma com reposição, qual seria a nova probabilidade?
Neste caso seriam eventos independentes, logo teríamos que somar as suas probabilidades
Então, teriamos
Se primeiro branca e depois preta : $p(E_1) = 3/5 \,.\, 2/5 = 6/5$
Se primeiro preta e depois branca : $p(E_2) = 2/5 \,.\, 3/5 = 6/5$
A probabilidade total seria então 12/25

5. Uma clinica especializada trata de 3 tipos de moléstias: A, B e C. 60% dos que procuram a clínica são portadores da moléstia A, 30% são portadores de B e 10% de C. As probabilidades de cada moléstia nesta clinica são, respectivamente, 0,8 ; 0,9 ; 0,75. Um doente sai curado da clinica. Qual a probabilidade de que ele sofresse da moléstia B?
Pelos dados podemos representar conforme figura abaixo




Então, temos
p(B e curado) = 0,3 x 0,9 = 0,27
p(curado) = 0,6 x 0,8 + 0,3 x 0,9 + 0,1 x 0,75 = 0,825
Logo
p(B|curado) = p(B e curado) / p(curado)
Ou seja,
p(B|curado) = 0,27 / 0,825 = 0,3273 ==> 32,7%

6. Uma moeda é lançada 8 vezes. Qual a probabilidade de observarmos, no máximo, 3 caras?
Então, temos :
n = 8 ( número de vezes)
p = 1/2 (probabilidade de dar cara)
q = 1/2 (probabilidade de não dar cara)
Usando a lei binomial podemos ter:
$p_0 = C_{8,0}.(1/2)^0.(1/2)^8 = 1/256$
$p_1 = C_{8,1}.(1/2)^1.(1/2)^7 = 8/256$
$p_2 = C_{8,2}.(1/2)^2.(1/2)^6 = 28/256$
$p_3 = C_{8,3}.(1/2)^3.(1/2)^5 = 56/256$
Então:
p = 93 / 256 = 0,36

Exercícios Propostos

1. De um grupo de 200 pessoas, 160 tem fator Rh positivo, 100 tem o tipo O e 80 tem fator Rh positivo e tipo O. Se uma dessas pessoas for selecionada ao acaso, qual a probabilidade de acontecer:
a) ter seu sangue com fator Rh positivo?
b) seu sangue não ser do tipo O?

Resp. a) 4/5 e b) 1/2

2. Um grupo é constituido por 8 homens e 6 mulheres. Quatro pessoas são selecionadas ao acaso, sem reposição. Qual a probabilidade de que ao menos duas sejam homens ?

Resp. 0,15

3. Jogando−se tres dados, qual a probabilidade de que a soma dos pontos obtidos seja superior a 15?

Resp. 0,046

4. A probabilidade de um guarda aplicar quatro ou mais multas em um dia é de 64%. A probabilidade de aplicar quatro ou menos multas em um dia é de 56%. Qual a probabilidade dele aplicar exatamente quatro

multas?

Resp. 0,20

6. A probabilidade de um satélite ser recuperado com algum aproveitamento é de 1/10. Se tres satélites são lançados, qual a probabilidade de se recuperar apenas um satélite?

Resp. 0,243

Cortesia do Prof. Mauro
Qualquer dúvida ligue para (21) 25685773